Géométrie rigide et fonctions zêta motiviques

Soit X une variété complexe lisse et connexe, et considérons un morphisme dominant f de X vers la droite affine Spec C[t]. Denef et Loeser ont associé à f une fonction zêta motivique Z(f;T), par analogie avec la fonction zêta locale d'Igusa au cas p-adique. Cette fonction est une série génératrice à coefficients dans un certain anneau de Grothendieck, et elle reflète les propriétés arithmétiques de X sur C[[t]]. Selon la conjecture de monodromie, il existe un lien précis entre les pôles de Z(f;T), et certains invariants des singularités de l'hypersurface définie par f dans X (notamment les valeurs propres de la monodromie).

Le complété t-adique de f est un schéma formel sur C[[t]], et nous appelons sa fibre générique la fibre proche de f. C'est une variété rigide lisse sur le corps des séries de Laurent C((t)) (la géométrie rigide est une théorie de géométrique analytique sur des corps non-archimédiens, comme C((t)) muni de sa norme t-adique). Nous montrerons comment on peut utiliser la géométrie formelle et la géométrie rigide pour mieux comprendre la fonction zêta Z(f;T). En particulier, nous donnerons une interprétation de cette fonction comme une série génératrice de Weil, qui mesure les points rationnels de la fibre proche de f sur les extensions finies de C((t)), et nous établirons une formule de trace à la Grothendieck. Cette interprétation montre un rapport intéressant entre l'arithmétique de la fibre proche, et la géométrie des singularités de f.

Rigid geometry and motivic zeta functions

Let X be a connected smooth complex variety, and consider a dominant morphism f from X to the affine line Spec C[t]. Denef and Loeser associated to f a motivic zeta function Z(f;T), by analogy with Igusa's local zeta function in the p-adic setting. This motivic zeta function is a generating series with coefficients in a certain Grothendieck ring, and it reflects the arithmetic properties of X over C[[t]]. The monodromy conjecture predicts a precise connection between the poles of Z(f;T), and certain invariants of the singularities of the complex hypersurface defined by f (namely, the monodromy eigenvalues).

The t-adic completion of f is a formal scheme over C[[t]], and we call its generic fiber the nearby fiber of f. It is a smooth quasi-compact rigid variety over the field of Laurent series C((t)) (rigid geometry is a theory of analytic geometry over non-archimedean fields, such as C((t)) endowed with its t-adic norm). We will show how formal and rigid geometry can be applied to the study of the zeta function Z(f;T). In particular, we establish this function as a Weil generating series, measuring rational points on the nearby fiber over finite extensions of C((t)), and we prove a Grothendieck trace formula. This yields an interesting connection between the arithmetic properties of the nearby fiber, and the geometry of the singularities of f.