AMALGAMES DE HRUSHOVSKI

1. LA LIMITE DES COURBES GENERIQUES

poizat@math.univ-lyon1.fr

En juillet 1989, Ehud Hrushovski annonçait lors d'un congrès à Durham qu'il avait obtenu, grâce à une construction par amalgamation, un objet de rang de Morley un dont la géométrie n'était ni celle d'un ensemble sans structure (dimension = cardinalité), ni celle d'un espace vectoriel (dimension = dimension linéaire), ni celle d'un corps (dimension = degré de transcendance) ; cela répondait négativement à une conjecture de Boris Zil'ber.

Depuis, les constructions de ce type ont donné de nombreux exemples et contre-exemples en Théorie des Modèles, dont les plus sophistiqués sont dus à Hrushovski lui-même.

Pour un catalogue de ceux qui sont parus au XX° siècle :

Bruno Poizat, Amalgames de Hrushovski, une tentative de classification, in *Tits buildings and the Model Theory of groups* (ed. K. Tent), Cambridge University Press, 2002

Collapsed or not collapsed ?

Dans la première publication qui leur est consacrée

John B. Goode, Hrushovski's geometries, in *Seminarberichte 104,* Humboldt Universität, 1989

ces amalgames sont présentés en deux étapes : un amalgame libre (produisant une structure de rang omega), suivi d'un collapsage (... de rang un), qui est une amalgamation dans une classe plus restreinte ; dans ses publications suivantes, Hrushovski fait tout en même temps.

L'introduction au collapsage est laissée au 2° conférencier.

Amalgames de Fraïssé

On peut amalgamer les plongements entre relations ternaires symétriques irréflexives de base finie, par exemple en introduisant le moins possible de liens (= triplets satisfaisant la relation) dans l'amalgame :

$$
\begin{tikzcd}
 & D & \\
B \arrow[ur] & & C \arrow[ul] \\
 & A \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$D = (B\text{-}A) \cup (C\text{-}A) \cup A$$

$r(x,y,z)$ seulement si

$x, y, z \in B$ ou $x, y, z \in C$

On fait une suite d'amalgames systématiques de relations (ternaires, sym. et irr.) finies $B_0 \subset B_1 \ldots \subset B_n \subset \ldots$, sans jamais oublier personne : si C est une extension finie d'une restriction A de B_n , il faudra penser un jour à amalgamer B_{n+m} et une copie de C au-dessus de A .

La limite des B_n est une relation dénombrable, uniqmt dét. à l'isomorphie près, qui est *homogène* (tout isomorphisme entre deux de ses restrictions finies s'étend en un autom.) et *universelle* (toute relation ternaire sym. irr. finie s'y plonge).

C'est une structure saturée, oméga-catégorique, dont la théorie est axiomatisée par les énoncés de la forme :

$$(\forall\ \underline{x})\ (\exists \underline{y}) \quad \varphi(\underline{x}) \ \rightarrow\ \psi(\underline{x},\underline{y})$$

où $\psi(\underline{x},\underline{y})$ est le diagramme d'une relation ternaire symétrique irréflexive finie, et $\varphi(\underline{x})$ sa restriction à $\underline{x}$.

Il y a des classes universelles non amalgamables ; et quand elles le sont l'homogène-universel n'est pas toujours saturé.

Amalgames de Hrushovski

Si A est une relation ternaire sym. irr. finie, sa prédimension est : $\delta(A)$ = nb. de points - nb. de liens .

La classe universelle U_0 est formée des relations ternaires sym. irr. dont toutes les restrictions finies sont de prédimension ≥ 0 ; elle n'est pas amalgamable.

Si A est une restriction de B ($\in U_0$), sa dimension dans B est : $d_B(A) = \mathrm{Min}\ \delta(A')$ où $A \subseteq A' \subseteq B$. Un plongement est *autosuffisant* s'il conserve la dimension ($d_B(A) = \delta(A)$).

Les plongmts autosuffisants sont amalgamables dans U_0 , et permettent d'obtenir une homogène-universelle (relativement aux plong. autos.) qui est une structure saturée M de rang de Morley omega avec une géométrie inédite. Pour le rang de Morley un, il faut amalgamer dans une classe $U_\mu \subset U_0$.

Si A est une partie finie de M, il existe un plus petit sur-ensemble fini de A qui est autosuffisant dans M ; on l'appelle *clôture autosuffisante de* A.

Le type de A au sens de la théorie de M, ça sera le type libre (de quanteurs) de la clôture autosuffisante de A. Comme son cardinal n'est pas borné en fonction de celui de A, la structure M n'est pas omega-catégorique (ce qui est rassurant pour le Théorème de Zil'ber !).

Ce qui caractérise M , ce sont les conditions de la forme :

$$(\forall\, \underline{x})\,(\exists \underline{y}) \quad [\, \underline{x} \text{ est autosuffisant} \wedge \varphi(\underline{x})\,] \;\rightarrow$$
$$[\, \psi(\underline{x},\underline{y}) \wedge (\underline{x},\underline{y}) \text{ est autosuffisant}\,]$$

où $\psi(\underline{x},\underline{y})$ est le diagramme d'une relation de U_0 et $\varphi(\underline{x})$ celui d'une de ses restrictions autosuffisantes. Ça ne donne pas directement une axiomatisation de la théorie de M car l'autosuffisance ne s'exprime pas finiment.

Mais en procédant pas-à-pas, il suffit de considérer ces conditions où il n'y a rien d'autosuffisant compris entre $\underline{x}$ et $(\underline{x},\underline{y})$, ce qui donne deux cas, suivant que $\delta(\underline{x},\underline{y}) - \delta(\underline{x}) = 0$ où 1 ; comme les configurations du deuxième cas sont limites de configurations du premier cas, il suffit de postuler ce dernier, la compacité imposant les conditions du deuxième cas dans les modèles saturés.

On peut alors supprimer l'autosuffisance dans l'apodose : si $\delta(\underline{x},\underline{y}) - \delta(\underline{x}) = 0$ et $\underline{x}$ est autosuffisant, $(\underline{x},\underline{y})$ l'est automatiquement. On peut également la supprimer dans la protase, car si l'axiome devient plus fort, il reste vrai dans M (amalgamer librement $\underline{y}$ à la clôture autosuffisante de $\underline{x}$).

En ajoutant ces conditions $(\forall \underline{x}) (\exists \underline{y})\ \varphi(\underline{x}) \rightarrow \psi(\underline{x},\underline{y})$ aux axiomes universels de U_0 , on obtient une théorie dont on voit facilmt que M est le seul modèle dénombrable saturé.

Difficultés avec les amalgames de Hrushovski :

- trouver les morceaux du puzzle, et intuiter la formule de prédimension adaptée à ce qu'on veut faire ;
- montrer l'amalgamation autosuffisante (il est essentiel que la partie négative de δ soit modulaire) ;
- décider si l'homogène-universel est saturé ou pas ; si oui, il faut axiomatiser sa théorie en approximant finiment l'amalgame ; yaDK où m^ l'axiomatisation de U_0 ne va pas de soi.

Tout devient bien plus compliqué avec les classes collapsées U_μ , car on doit utiliser des amalgames économiques au lieu d'amalgames libres.

Cela aussi bien au niveau de l'existence de l'amalgame qu'au niveau de son axiomatisation, car on est obligé de conserver des morceaux finis d'autosuffisance dans les protases.

La convergence des courbes génériques

On va faire un amalgame non-collapsé pour obtenir un objet géométriquement naturel, apparu dans :

Olivier Chapuis, Pascal Koiran, Ehud Hrushovski et Bruno Poizat, La limite des théories de courbes génériques, *The Journal of Symbolic Logic,* 67, 2002

On fixe une caractéristique arbitraire.

Soient K un corps algébriquement clos, et $N = (d+1)(d+2)/2$ de ses éléments a_{ij} , $0 \leq i+j \leq d$, algébriqmt indépendants ; la courbe plane C_d définie par l'équation $\Sigma\, a_{ij}.x^i.y^j = 0$ est dite *courbe générique* de degré d .

Toutes ces courbes C_d se correspondent par automorphisme de K (elles ne sont pas géométriquement isomorphes si $n \geq 3$) ; elles ont même théorie T_d dans le langage des corps augmenté d'une relation binaire.

Nous allons montrer que la suite T_d est convergente dans l'espace des théories complètes de ce langage.

Pour ce faire, nous construisons une structure (K,C) candidate à être la limite, nous en axiomatisons la théorie T , et nous vérifions que chacun de nos axiomes est vérifié par T_d pour d assez grand ; accessoirement, cette limite sera de rang de Morley omega.

Construction de la limite

Nous amalgamons des structures (k,c) , où k est un corps algébriquement clos de degré de transcendance finie, et c une partie finie de $k \times k$; la formule de prédimension est :

$$\delta(k,c) \quad = \quad d^\circ\text{trans}(k) \ - \ \text{nombre de points de } c \ .$$

Notre limite est l'homogène-universel (K,C) pour les plongements autosuffisants de la classe U_0 associée à δ .

Axiomatisation de la classe U_0

Il faut dire que le corps est algmt clos, de la caract. voulue, et que n points sur la courbe ont des coordonnées de degré de transc. $\geq n$. On met un axiome par système d'équations polynomiales à coeff. entiers $E(x_1, \dots x_n ; y_1, \dots y_n)$ dont les solutions sont toutes de degré de transc. $< n$:

$$(\forall x_1,y_1, \dots x_n,y_n) \qquad [\textstyle\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} (x_i,y_i) \neq (x_j,y_j) \quad \wedge \quad \bigwedge_{1\leq i\leq n} C(x_i,y_i)] \quad \longrightarrow \quad \neg E(x_1, \dots x_n ; y_1, \dots y_n) .$$

Ces axiomes sont satisfaits par T_d si $d \geq n-1$; en effet :

Lemme. *Si* $d \geq n\text{-}1$ *, les coefficients des courbes planes de degré* $\leq d$ *qui passent par* n *points distincts du plan forment un espace vectoriel de dimension* $N\text{-}n$.

Démonstration. Les équations linéaires exprimant que la courbe passe par chacun des points sont linéairement indépendantes ; en effet la courbe de degré $\leq d$ d'équation $\Pi_{i<n,\ ai\neq an}\ (x - a_i) \times \Pi_{j<n,\ aj=an}\ (y - b_j) = 0$ passe par (a_1,b_1) , ... (a_{n-1},b_{n-1}) , et pas par le dernier point (a_n,b_n) . **Fin**

Corollaire. *Si* $d \geq n-1$ *, et si une courbe générique de degré* d *passe par* n *points* $(a_1,b_1), \ldots (a_n,b_n)$ *du plan distincts, le degré de transcendance de leurs coordonnées vaut au moins* n .

Démonstration. Les coefficients de la courbe ont un degré de transcendance N sur $\varnothing$; leur degré de transcendance sur $\{a_1,b_1, \ldots a_n,b_n\}$ est au plus $N-n$; il faut donc que le degré de transc. de $\{a_1,b_1, \ldots , a_n,b_n\}$ soit au moins n . **Fin**

Qu'est-ce qu'il faut faire ensuite ?

D'abord vérifier que les plongements autosuffisants s'amalgament bien en restant dans U_0 (c'est pas dur) ; puis trouver une liste T d'axiomes $\forall\exists$ approximant la construction de l'amalgame, exprimant que tout peut exister sur la courbe sauf ce qui est incompatible avec U_0 ; voir que les modèles saturés de T se correspondent par va-et-vient infini (ça sera facile) ; et enfin vérifier que chaque axiome est satisfait par T_d pour d assez grand.

Les axiomes

Pour faciliter l'expression de la théorie de l'amalgame, on remarque tout d'abord que la positivité de δ équivaut à : si (x_1,y_1) , ... (x_n,y_n) sont des points distincts sur la courbe, on peut pour chaque i choisir u_i entre x_i et y_i de sorte que $u_1, \dots u_n$ soient algébriquement indépendants.

Cela vient de la version matroïdale du célèbre Théorème des mariages, où les femmes sont les points de la courbe et leurs amants leurs coordonnées.

Théorème des mariages. *On considère un ensemble fini de femmes, qui aiment des hommes. On suppose que chaque fois qu'on en prend un certain nombre* n *, il y a au moins* n *hommes qui sont aimés d'au moins l'une d'entre elles. Il est alors possible de marier monogamiquement toutes les femmes, chacune à un homme qu'elle aime.*

Théorème des mariages indépendants. *On suppose en outre que les hommes vivent dans une extension de corps* K/k *, et que, chaque fois qu'on prend* n *femmes, l'ensemble des hommes qu'elles aiment engendre un corps de degré de transcendance au moins* n *sur* k *. Alors il est possible de marier toutes les femmes à des hommes algébriquement indépendants sur* k *.*

Soit $\varphi(x_1,y_1, \ldots x_n,y_n,\underline{z})$ un système d'équations polynomiales à coefficients entiers ; comme la dimension est définissable, pour chaque fonction ε qui choisit $u_{\varepsilon i}$ entre x_i et y_i , il existe une formule $\psi_\varepsilon(\underline{z})$ du langage des corps exprimant que, $\underline{z}$ étant fixé, la formule $(\exists\, \underline{u}_\varepsilon)\, \varphi(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$ est de dimension n . Si $\psi(\underline{z})$ est la disjonction des $\psi_\varepsilon(\underline{z})$, la liste des axiomes est la suivante :

$$(\forall\, \underline{z})\, (\exists\, x_1,y_1, \ldots . x_n,y_n)\ \ \psi(\underline{z}) \ \rightarrow\ \wedge\wedge_{1\leq i\leq n} C(x_i,y_i) \wedge \varphi(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$$

Pour voir qu'ils sont satisfaits par T_d pour les grandes valeurs de d , on utilise une astuce reposant sur le Hauptidealsatz, permettant de calculer les dimensions des intersections de variétés projectives (les coefficients des courbes interviennent à une constante près).

Tout ça est fait dans le papier.

1ère application : une question de Koiran à Hrushovski

On constate que, si (K,C) est modèle de T, on obtient un autre modèle de T en otant un point quelconque de la courbe. Pour tout énoncé φ, T contient l'axiome suivant :

$$(\exists\, a,b) \quad \neg C(a,b) \wedge [\, \varphi(C) \quad \rightarrow \quad \varphi(C \cup \{(a,b)\}) \,] \;.$$

Conclusion : aucun énoncé du premier ordre ne peut séparer les courbes algébriques irréductibles des autres.

2ème application : la limite des polynômes génériques

Pascal Koiran a étendu le résultat aux polynômes génériques $P_d(x) = a_d.x^d + a_{d-1}.x^{d-1} + \ldots + a_1.x$, et construit par amalgame leur fonction limite $P(x)$.

Cette limite satisfait à la condition schanuelienne suivante : si $b_1 , \ldots b_n$ sont distincts et $\neq 0$, le degré de transcendance de $\{ b_1 , \ldots b_n , P(b_1) , \ldots P(b_n) \}$ vaut au moins n .

Sur le corps des complexes, cette limite a une interprétation analytique, comme somme d'une série de Liouville, dont les coefficients sont des inverses d'entiers croissant rapidement. Wilkie a montré qu'elles avaient toutes même théorie, et Koiran a vérifié que cette théorie était la limite de celles des polynômes génériques ; c'est une réponse partielle à la nouvelle vision analytique de Zil'ber !