Autour de la conjecture de Pierce-Birkhoff

28.05.2010

Exposé de F.Lucas
Travail de F.Lucas, J.Madden,D.Schaub, M.Spivakovski

La conjecture est la suivante :

Conjecture 1 *Pour tout entier n et pour tout anneau de polyhôme sur le corps des réels* $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$*, si une fonction* f *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est polynomiale par morceaux, alors il existe une famille finie de polynômes* g_{ij} *tels que*

$$f(x) = \sup_i \inf_j (g_{ij}(x))$$

(On dit que f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est polynomiale par morceaux, si $\mathbb{R}^n$ peut être recouvert par une famille finie de fermés semialgébriques P_i tels que pour tout i il existe un polynôme f_i pour lequel les restrictions de f et de f_i à P_i sont égales).

Cette conjecture, clairement vraie pour $n = 1$ a été démontrée par Mahé dans le cas $n = 2$. Pour les autres entiers la question est ouverte.

J.Madden a donné de cette conjecture une nouvelle version, en utilisant les spectres réels d'anneaux ($Sper(A)$ et en définissant une notion d'idéal séparant $< \alpha, \beta >$ de deux points α et β du spectre.

Conjecture 2 *Si f est polynomiale par morceaux,* f_α *et* f_β *des représentants locaux de* f *respectivement en* α *et en* β*, alors* $f_\alpha - f_\beta \in < \alpha, \beta >$.

Cette nouvelle version a deux avantages :

1. Elle met en évidence le caractère local de la conjecture.
2. Elle permet de définir une notion d'anneau "satisfaisant PB".

Nous (F.L., J.M.,D.S.,M.S.) avons énoncé plusieurs conjectures proches, en particulier un "conjecture de connexité" dont nous avons montré qu'elle entrainait la conjecture de PB. Elle s'énonce :(on note ici A l'anneau)

Conjecture 3 *Si* $g_1, ..., g_s$ *est une famille finie d'éléments de* $A\setminus < \alpha, \beta >$*, alors* α *et* β *sont dans la même composante connexe de* $Sper A \setminus \{g_1...g_s = 0\}$.

J.Madden et B.Johnston ont étudié le comportement de l'idéal séparant par localisation et par éclatement, spécialement dans le cas des anneaux réguliers de dimension 2, de type fini sur un corps réel clos, dans ce cas ils pouvaient utiliser la théorie de Zariski des idéaux complets.

Dans l'article "On the Pierce-Birkhoff conjecture for snooth affine surfaces over real closed fields" S.Wagner reprend ce travail et montre la conjecture de connexité en dimension 2 pour les anneaux réguliers de type fini sur un corps réel clos.

Nous avons, depuis plusieurs années cherché à mettre en place des outils pour étudier PB pour des classes d'anneaux les plus larges possibles :

1. Etudier les valuations associées aux points du spectre réel en termes de racines approchées.
2. Donner une description des idéaux séparants dans ces termes.

3. Construire un connexe répondant aux conditions de la conjecture de connexité en termes d'inégalités entre ces racines approchées.
4. Ramener ces inégalités à des inégalités entre coordonnées par des éclatements maitrisés.

Au long de ce travail nous avons obtenu différents résultats :

1. Un Lemme de connexité pour certains sous ensembles du Spectre réel d'anneaux locaux réguliers (de type fini ou non).
2. en dimension 2, la propriété de P.B. pour les anneaux réguliers (de type fini ou non), sur un corps réel clos.
3. en dimension plus grande la détermination d'un certain nombre de couples (α, β) du spectre pour lesquels PB est vérifiée.