Amalgames de Hrushovski 2

Construction d'un mauvais corps en caractéristique 0

Martin Hils

travail en commun avec
A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner

GTM du 4 avril 2008

Introduction aux mauvais corps

Conjecture d'algébricité (Cherlin-Zilber):
Un groupe simple infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Deux obstacles majeures dans la stratégie de preuve initiale : **Mauvais Groupes** et **Mauvais Corps**.

Définition. *Un* mauvais corps *est un corps algébriquement clos K avec un sous-groupe propre infini du groupe multiplicatif $\ddot{U} \leq K^*$ tel que la structure $(K, +, \cdot, \ddot{U})$ soit de rang de Morley fini.*

L'absence de mauvais corps simplifierait l'étude des sous-groupes de Borel.

Question. [Zilber] *Est-ce que les mauvais corps existent ?*

Théorème. [Wagner 2003] *S'il y a une infinité de nombres premiers p-*Mersenne*, c.à.d. de la forme $\frac{p^n-1}{p-1}$, alors il n'existe pas de mauvais corps en caractéristique p.*

L'existence de mauvais corps semble donc peu probable en caractéristique positive.

Question. *Qu'est-ce qui se passe en caractéristique 0 ?*

Théorème. [Poizat 2001] *Il y a une paire $(K_\omega, \ddot{U})$, avec K_ω alg. clos de caractéristique 0 et $\ddot{U} \leq K_\omega^*$ un sous-groupe divisible et sans torsion, tel que le rang de Morley de toute la structure est égal à $\omega \cdot 2$, avec $\mathrm{MR}(\ddot{U}) = \omega$.*

La construction de $(K_\omega, \ddot{U})$ se fait par amalgames de Hrushovski (sans collapse).

Conjecture (Poizat). $(K_\omega, \ddot{U})$ peut être collapsée sur une structure $(K_\mu, \ddot{U})$ de rang de Morley 2 (avec $\ddot{U}$ fortement minimal), c'est à dire sur un mauvais corps de caractérsitique 0.

Théorème. [Baudisch,H.,M.-Pizarro,Wagner 2006] *On peut effectuer ce collapse et donc construire un mauvais corps de car. 0.*

Introduction au collapse

– Constructions par amalgames de Hrushovski $\Rightarrow$ **théories de rang de Morley infini** T_ω.

– $\mathrm{d}(\bar{a}/B) := \delta(\mathrm{cl}(B\bar{a})/\mathrm{cl}(B))$, où $\bar{a}, B \subseteq M \models T_\omega$

– $\mathrm{cl_d}(B) := \{a \in M \mid \mathrm{d}(a/B) = 0\}$, la d-*clôture*

– Idée pour construire des **structures de rang fini** :

• modifier la construction par amalgames de sorte que $\mathrm{d}(\bar{a}/B) = \mathrm{MR}(\bar{a}/B)$; autrement dit :

• construire une théorie T avec $\mathrm{acl}_T = \mathrm{cl_d}$.

• Amalgamer dans une classe restreinte, en **bornant uniformément le nombre de réalisations des types de dimension 0**.

Ce procédé est appelé **collapse**, et nous l'illustrons d'abord en considérant la courbe générique (K_ω, C), construite dans l'exposé de B. Poizat. Contrairement à la construction libre, le collapse n'est pas canonique.

Extensions autosuffisantes minimales

Nous travaillons dans la classe $\mathcal{U}_0$ introduite par Poizat.

Une ext. autosuffisante $(K, C^K) \leq (L, C^L)$ (propre) est **minimale** si pour tout L' alg. clos avec $K \leq L' \leq L$ on a $L' = K$ ou $L' = L$.

Il y en a de deux sortes :

- **ext. générique** : $\mathrm{tr.deg}(L/K) = 1$ et $C^L = C^K$ (d'où $\delta(L/K) = 1$)
- **ext. préalgébrique minimale** : $\delta(L/K) = 0$ et $\delta(L/L') < 0$ pour tout corps alg. clos $K \subsetneq L' \subsetneq L$.

$\Rightarrow$ Pour collapser, **il suffit de considérer les extensions préalgébriques minimales**.

$\Rightarrow$ L/K préalg. minimale est déterminée par $V = \mathrm{locus}(\bar{a}/K)$, où $\bar{a}$ est l'uplet des coordonnées des points dans $C^L \setminus C^K$. On a $L = \mathrm{acl}(K\bar{a})$.

Génériquement coder des variétés

Fait. *$\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble $\mathcal{P}_n$ de familles $\emptyset$-définissables $V_{\bar{z}}(\bar{x})$ de variétés irréd. dans $\mathbb{C}^n$ tel que*

(1) Pour toute variété irréducible $W = W(\bar{x}) \subseteq \mathbb{C}^n$ il existe $V \in \mathcal{P}_n$ et $\bar{b} \in \mathbb{C}$ tel que $W = V_{\bar{b}}$.

(2) Si $\emptyset \neq V_{\bar{b}} = V'_{\bar{b}'}$ pour $V, V' \in \mathcal{P}_n$ et $\bar{b}, \bar{b}' \in \mathbb{C}$, alors $V = V'$ et $\bar{b} = \bar{b}'$.

On améliore ce premier codage, en remplaçant V par une famille $X_{\bar{z}}(\bar{x})$ d'ensembles constructibles telle que

(3) Pour tout $\bar{b}$, $X_{\bar{b}}$ est un sous-ensemble gén. de $V_{\bar{b}}$.

(4) Deux instances non-vides de X ont le même rang de Morley k_α. De plus, si $\bar{a} \in X_{\bar{b}}$ est $\bar{b}$-générique et $\bar{a}' \in X_{\bar{b}'}$ avec $\bar{a}', \bar{b}'$ arbitraires, alors
   - $a_i = a_j$ ssi $a'_i = a'_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$;
   - $a_i \in \mathrm{acl}(a_J\bar{b})$ implique $a'_i \in \mathrm{acl}(a'_J\bar{b}')$ pour tout $i \leq n$ et $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Coder les extensions préalgébriques

Soit L/K préalg. min. et $\bar{a} \subseteq L \backslash K$ l'uplet des coordonnées des nouvaux points sur C. L/K est déterminée par

$$W := \mathrm{locus}(\bar{a}/K) \text{ et } \Delta(\bar{x}) := \bigwedge_{(a_i, a_j) \in C^L} C(x_i, x_j)$$

Si $W = V_{\bar{b}} \supseteq X_{\bar{b}}$ avec les notations d'avant, un **bon code** est une formule du type

$$\varphi(\bar{x}, \bar{z}) = X(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \Delta(\bar{x}).$$

Pour $\bar{b} \in K$, $\bar{a}$ est K-**générique** dans $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$, si $\bar{a}$ est K-gén. dans $X(\bar{x}, \bar{b})$ (au sens des corps) et si les seuls points dans $C^{\mathrm{acl}(K\bar{a})} \setminus C^K$ sont ceux préscrits par Δ.

(i) Un K-générique induit une ext. préalg. min. de K.

(ii) Si $\models \varphi(\bar{a}', \bar{b}')$, alors $\delta(\mathrm{acl}(K\bar{a}')/K) \leq 0$, avec égalité ssi $\bar{a}' \in K$ ou $\bar{a}' \cap K = \emptyset$ et $\bar{a}'$ est K-générique.

Proposition. *Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{C}_b$ de bons codes tel que toute extension préalg. minimale soit donnée par une instance $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, avec $\alpha \in \mathcal{C}_b$ et $\bar{b}$ unique.*

Pseudo-suites de Morley

Soit $\alpha \in \mathcal{C}_b$. Une **suite de Morley** de longueur m pour α avec paramètre $\bar{b}$ est une suite $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m)$ de **solutions génériques et indépendantes** de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$.

Fait. $\forall\, \alpha$ *il existe un* $m_\alpha \geq 1$ *et une fonction rationnelle* F_α *t.q. pour toute suite de Morley* $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{m_\alpha})$ *de longueur* m_α *avec paramètre* $\bar{b}$ *on ait* $\bar{b} = F_\alpha(\bar{e}_1, \ldots \bar{e}_{m_\alpha})$.

Une **pseudo-suite de Morley** (de longueur $m \geq m_\alpha$) pour α avec paramètre $\bar{b}$ est une suite $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m)$ t.q.

- $\bar{e}_i \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ pour tout i ;
- les coordonnées des $\bar{e}_i$ sont 2 à 2 distinctes ;
- $\bar{b} = F_\alpha(\bar{e}_{i(1)}, \ldots, \bar{e}_{i(m_\alpha)})\ \forall\, i(1) < \ldots < i(m_\alpha)$;
- si $\tilde{e} \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ est générique sur la suite, alors $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{i-1}, \tilde{e}, \bar{e}_i, \ldots, \bar{e}_m)$ est une pseudo-suite de Morley.

On choisit deux fonctions $\mu, \mu^* : \mathcal{C}_b \to \mathbb{N}$ telles que

- μ^* est *à fibres finies* et $\mu^*(\alpha) \geq m_\alpha\ \forall\, \alpha \in \mathcal{C}_b$.
- $\mu >> \mu*$.

Amalgame économique

Définition. *La classe* $\mathcal{U}_\mu$ *est donnée par les structures* $M = (K, C) \in \mathcal{U}_0$ *ne contenant,* $\forall\ \alpha \in \mathcal{C}_b$*, aucune pseudo-suite de Morley pour* α *de longueur* $\mu(\alpha) + 1$*.*

Pour M'/M générique, on a $M \in \mathcal{U}_\mu \Leftrightarrow M' \in \mathcal{U}_\mu$. Quant aux extension préalg. minimales, dans tous les collapses, on montre un lemme du type suivant.

Lemme combinatoire. *Soit* $M \in \mathcal{U}_\mu$ *et* M'/M *une extension préalg. minimale, donnée par une réalisation (générique)* $\bar{a}$ *de* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$*, où* $\bar{b} \in M$*. Alors* $M' \notin \mathcal{U}_\mu$ *ssi une des situations suivantes se produit :*

(a) M *contient une pseudo-suite de Morley de longueur* $\mu(\alpha)$ *pour* α *avec paramètre* $\bar{b}$ *;*

(b) M' *contient une pseudo-suite de Morley de longueur* $\mu(\beta) + 1$ *pour* $\beta \in \mathcal{C}_b$ *t.q. plus de* $\mu^*(\beta)$ *des éléments de la suite sont contenus dans* $\bar{a}$ *(c.à.d. dans* $M' \setminus M$*).*

Corollaire. [Amalgamation économique]
La classe $(\mathcal{U}_\mu, \leq)$ *a la propriété d'amalgamation. Il existe donc une (unique) limite de Fraïssé-Hrushovski* (K_μ, C)*.*

La courbe générique collapsée

Axiomes pour T_μ, la théorie de la courbe gén. collapsée (K_μ, C) :

On a $M = (K, C^K) \models T_\mu$ ssi

- $M \in \mathcal{U}_\mu$
- $M' \notin \mathcal{U}_\mu$ pour toute extension préalg. minimale M'/M (un axiome χ_α pour tout bon code α)

Théorème. *T_μ est fortement minimale avec $\mathrm{d}(\bar{a}/B) = \mathrm{MR}(\bar{a}/B)$. En particulier, $a \in \mathrm{acl}_{T_\mu}(B)$ ssi $\mathrm{d}(a/B) = 0$.*
(K_μ, C) est donc une expansion fortement minimale d'un corps algébriquement clos par une courbe non-algébrique.

Remarque. *1. Hrushovski construit même des structures f. m. supportant deux structures de corps alg. clos de caractéristique différente ($\Leftarrow$ résultat de* fusion*).*

2. Une telle expansion f.m. est impossible en la présence d'une géométrie de Zariski *(Hrushovski-Zilber).*

Bestiaire des corps bicolores (Poizat)

Corps noirs : Corps alg. clos K avec un **sous-ensemble distinct** $N^K \subseteq K$ (car. arbitraire fixée).

– Prédimension $\delta((K, N^K)) := 2\,\mathrm{tr.deg}(K) - |N^K|$
– Amalgame libre $\Rightarrow$ corps noir de rang de Morley $\omega \cdot 2$.
– Collapse (Poizat 1999, Baldwin-Holland 2000) sur un corps noir de rang de Morley 2.
– Similaire à la construction de la courbe générique.

Corps rouges : Corps alg. clos K de caractéristique $p > 0$ avec un **sous-groupe additif distinct** $R^K \subseteq K$.

– $\delta((K, R^K)) := 2\,\mathrm{tr.deg}(K) - \mathrm{l.dim}_{\mathbb{F}_p}(R^K)$
– Amalg. libre $\Rightarrow$ corps rouge de rang de Morley $\omega \cdot 2$.
– Collapse (Baudisch, Martin-Pizarro, Ziegler 2005).
– Difficultés principales :
  • types préalg. min. non-triviaux (loc. projectifs) ;
  • les transformations affines-linéaires ($/\mathbb{F}_p$) opèrent sur l'ensemble des codes.
– Outil crucial : *suites aux différences*

Corps verts : Corps alg. clos K de caractéristique 0 avec un **sous-groupe multiplicatif distinct** (divisible et sans torsion) $\ddot{U}^K \subseteq K^*$.

- $\delta((K, \ddot{U}^K)) := 2\,\mathrm{tr.deg}(K) - \mathrm{l.dim}_{\mathbb{Q}}(\ddot{U}^K)$
- Amalg. libre $\Rightarrow$ corps vert de rang de Morley $\omega \cdot 2$, le "mauvais corps de rang infini" de Poizat.
- Problème de définissabilité (a priori), car les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels ne sont pas localement finis.

• $\mathcal{U}_0$:= classe des structures $(K, \ddot{U}^K)$, où K est un corps alg. clos de caractéristique 0 et $\ddot{U}^K \leq K^*$ divisible et sans torsion (c'est donc un e.v. sur $\mathbb{Q}$), avec $\delta(k) \geq 0$ pour tout sous-corps de K de degré de transcendence fini.

• Les éléments de $\ddot{U}$ sont **verts**, les autres **blancs**.

• δ est sous-modulaire : Pour $A, B \subseteq M$ in $\mathcal{U}_0$ on a

$$\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B).$$

• En amalgamant les corps verts dans $\mathcal{U}_0$ de degré de transc. fini (selon les plongements *autosuffisants* $\leq$), on obtient la structure $(K_\omega, \ddot{U})$ comme limite de Fraïssé-Hrushovski.

Extensions autosuffisantes minimales

Il y a trois types d'ext. autosuffisantes minimales L/K :

• **gén. blanche** : $\mathrm{tr.deg}(L/K) = 1$ et $\ddot{U}^L = \ddot{U}^K$ (donc $\mathrm{d}(L/K) = 2$) ;

• **gén. verte** : $\mathrm{tr.deg}(L/K) = 1$ et $\mathrm{l.dim}(\ddot{U}^L/\ddot{U}^K) = 1$ (donc $\mathrm{d}(L/K) = 1$), c'est à dire $L = \mathrm{acl}(Ka)$ et $\ddot{U}^L = \langle \ddot{U}^K a \rangle_{\mathbb{Q}}$ pour un nouveau point vert a ;

• **préalg. minimale** : $\mathrm{l.dim}(\ddot{U}^L/\ddot{U}^K) \geq 2$, $\delta(L/K) = 0$ et $\delta(L/L') < 0$ pour tout corps alg. clos $K \subsetneq L' \subsetneq L$.

Soit L/K préalg. min. et $\bar{a}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\ddot{U}^L/\ddot{U}^K$. Alors, L/K est (essentiellement) déterminée par $\mathrm{locus}(\bar{a}/K)$.

Une **variété** irréd. $V(\bar{x}, \bar{b}) \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$ (plus généralement une formule ou un type partiel de degré de Morley 1) est **préalgébrique minimale** si pour tout $K \in \mathcal{U}_0$ toute solution verte K-générique $\bar{a}$ engendre une extension préalg. minimale L/K.

Correspondances toriques

Fait. [Y. Mustafin] *Le stabilisateur multiplicatif d'une variété préalg. minimale est fini. Les géométries associées aux types préalg. minimaux — des types fortement minimaux — sont alors triviales.*

La minimalité préalgébrique est invariante

– par **translations multiplicatives** et

– par **correspondances toriques** :

Soit $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n$ un tore de dimension n, tel que

$$\pi_i(T) = (\mathbb{C}^*)^n \text{ pour } i = 1, 2.$$

Soient $V_1, V_2 \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$ des variétés irréductibles. T induit une **correspondance torique** entre V_1 et V_2 si

$$\pi_i(T \cap V_1 \times V_2)$$

est générique dans V_i pour $i = 1, 2$.

Difficulté principale et solution

Un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel n'est pas localement fini.

$\Rightarrow$ problèmes de définissablité

– L'axiomatisabilité de $\mathcal{U}_0$ n'est pas évidente.

– $\mathrm{Gl_n}(\mathbb{Q})$ (discret et infini) opère sur les types préalg.

$\Rightarrow$ pas clair comment adapter le collapse des corps rouges en car. positive (un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ est loc. fini !)

Idée. Remplacer toute utilisation de "localement fini" par les résultats de *Ax-Zilber-Poizat* sur l'**uniformité des intersections de variétés avec des tores**.

Poizat les a déjà empruntés pour obtenir $(K_\omega, \ddot{U})$, c.à.d. le corps vert de rang de Morley $\omega \cdot 2$.

Codimension d'une variété

Tore T = sous-groupe algébrique connexe de $(\mathbb{C}^*)^n$.

T est défini par des équations

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_{i,j}} = 1 \quad (j \leq m, \lambda_{i,j} \in \mathbb{Z})$$

Définition. • *Étant donné une variété irréd.* $W \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$*, son* **tore minimal** T *est le plus petit tore tel que* W *soit contenu dans un coset de* T*. La* **codimension** *de* W *est alors donnée par*

$$\mathrm{cd}(W) := \dim(T) - \dim(W).$$

• *Soit* $V \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$*. Une sous-variété irréd.* $W \subseteq V$ *est* cd-**maximale** *si* $\mathrm{cd}(W) < \mathrm{cd}(W')$ *pour toute variété irréd.* $W \subsetneq W' \subseteq V$*.*

Exemples. *Des composantes irréductibles de* V *; des cosets de tore maximaux dans* V*.*

Théorème. [Ax-Zilber-Poizat] *Soit* $V(\bar{x}, \bar{z})$ *une famille uniform. définissable de sous-variétés de* $(\mathbb{C}^*)^n$*.*

Alors il existe une famille finie $\mathcal{T}(V) = \{T_0, \dots, T_r\}$ *de sous-tores de* $(\mathbb{C}^*)^n$*, telle que pour toute variété* $V_{\bar{b}} = V(\bar{x}, \bar{b})$*, les tores minimaux des sous-variétés* cd*-maximales de* $V_{\bar{b}}$ *sont des éléments de* $\mathcal{T}(V)$*.*

En utilisant des idées de Zilber, Poizat avait obtenu ce résultat comme conséquence d'un théorème d'Ax (version différentielle de la Conjecture de Schanuel).

Remarque. *Ce théorème est faux en car.* $p > 0$ *:*
Soit K *alg. clos de caractéristique* p *et* $V \subseteq (K^*)^4$ *définie par les équations* $x + y = 1$ *et* $z + u = 1$*.*
Pour $n \in \mathbb{N}$*, soit* $T_n \subseteq (K^*)^4$ *le tore défini par les équations* $z^{p^n} = x$ *et* $u^{p^n} = y$*. On voit facilement :*

- V *est irréductible avec* $\dim(V) = 2$ *et* $\mathrm{cd}(V) = 2$ *;*
- $X_n := V \cap T_n$ *est une courbe irréductible avec tore minimal* T_n*, et on a donc* $\mathrm{cd}(X_n) = 1$ *;*
- X_n *est une sous-variété* cd*-maximale de* V*.*

Une famille de tores comme requise contiendrait nécessairement tous les T_n *(qui sont 2 à 2 distincts).*

En fait, Poizat montre d'abord le théorème suivant :

Théorème. *Soit $V(\bar{x}, \bar{z})$ une famille uniform. définissable de sous-variétés de $(\mathbb{C}^*)^n$.*

Alors il existe une famille finie $\mathcal{T}(V) = \{T_0, \ldots, T_r\}$ de sous-tores propres de $(\mathbb{C}^*)^n$, telle que pour tout tore $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$, tout $\bar{a}, \bar{b}$ et toute composante irréductible W de $\bar{a} \cdot T \cap V_{\bar{b}}$ avec $\dim(T) - \dim(W) < n - \dim(V) = \mathrm{cd}(V)$ (un tel W est appelé **atypique***) on ait $W \subseteq \bar{a} \cdot T_i$ pour un $T_i \in \mathcal{T}(V)$.*

Voici le théorème d'Ax évoqué ci-dessus :

Théorème. *Soient $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ des élements d'un corps différentiel (K, D) de car. 0. On suppose que*

- *$Dy_i = \frac{Dz_i}{z_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et*
- *$Dy_1, \ldots, Dy_n$ sont $\mathbb{Q}$-lin. indépendants.*

Alors $\mathrm{tr.deg}_C(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) \geq n + 1$, où C dénote le corps des constantes.

Conséquences d'Ax-Zilber-Poizat

Corollaire. *1. La classe $\mathcal{U}_0$ est axiomatisable.*

Soit maintenant $V_{\bar{z}}$ une famille uniform. définissable de sous-variétés irréd. de $(\mathbb{C}^*)^n$.

2. Soit T un tore fixé. Alors $\{\bar{b} \mid T$ est le tore minimal de $V_{\bar{b}}\}$ est définissable. En particulier, cd est définissable.

3. $\{\bar{b} \mid V_{\bar{b}}$ est préalg. minimale $\}$ est définissable.

Preuve de 1. Pour établir une axiomatisation de $\mathcal{U}_0$, il suffit d'exprimer :

• K est alg. clos de car. 0 ;

• le groupe $\ddot{U} \leq K^*$ est divisible sans torsion, avec 1 comme seul point algébrique ;

• pour toute variété irréd. $V(\bar{x}) \subseteq (\mathbb{C}^*)^{2n+1}$ de dimension n et définie sur $\mathrm{acl}(\mathbb{Q})$, si $\bar{a} \in V$ est vert, alors $\bar{a} \in T$ pour un $T \in \mathcal{T}(V)$ de dimension $< n$.

Codes

Définition. *Un* bon code α *est donné par une formule* $\emptyset$*-définissable* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{z})$ *et des entiers* n_α*,* k_α *(où* $n_\alpha = 2k_\alpha$*) satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ *est un sous-ensemble constructible de* $(\mathbb{C}^*)^{n_\alpha}$*.*

2. *Si* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ *est non-vide, alors cette formule est de rang de Morley* k_α *et de degré de Morley* 1*.*

3. *Si* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \neq \emptyset$*, alors* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ *est préalg. minimale et son adhérence de Zariski* $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ *est irréductible.*

4. *Pour tout uplet vert* $\bar{a}$*, si* $\bar{a} \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ *pour un* $\bar{b} \in B$*, alors* $\delta(\bar{a}/B) \leq 0$*. De plus,* $\delta(\bar{a}/B) = 0$ *si et seulement si* $\mathrm{l.dim}(\bar{a}/B) = 0$ *ou* $\bar{a}$ *est* B*-générique dans* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$*.*

5. *Si* $\emptyset \neq \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$*, alors* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{z})$ *encode tout translaté multiplicatif de* $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$*.*

6. *Si* $\emptyset \neq \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \sim \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$*, alors* $\bar{b} = \bar{b}'$*.*

Existence de bons codes

• Soit $X \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$ préalg. minimal. Une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ et un tore T **encodent** $X = X(\bar{x})$, s'il existe $\bar{b}$ tel que T induise une correspondance torique entre $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ et $X(\bar{x})$.

• φ **encode** X si l'on peut prendre la correspondance identique ci-dessus pour T, c.à.d. si $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \sim X$.

Lemme. *1. Pour tout ensemble préalgébrique minimal il existe un bon code qui l'encode.*

2. Soient α et α' deux bons codes de la même longueur. Alors, il existe un ensemble fini de tores $G(\alpha, \alpha')$ tel que toute correspondance torique entre des instances de α et α' soient induites par des tores de $G(\alpha, \alpha')$.

Proposition. *Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{C}_b$ de bons codes tel que tout type préalg. minimal soit encodé par un unique $\alpha \in \mathcal{C}_b$ et un ensemble fini de tores $G(\alpha, \alpha)$.*

Preuve du lemme: L'existence d'un bon code suit du fait que la minimalité préalg. est une propriété définissable. Quant à la seconde partie, il suffit de montrer :

($*$) Si V_1 et V_2 sont des variétés préalg. minimales (dans $(\mathbb{C}^*)^n$), alors toute correspondance torique entre V_1 et V_2 est induite par un tore de $\mathcal{T}(V_1 \times V_2)$.

Soit donc T un tore qui induit une correspondance torique, et soit W une composante irréductible de dimension maximale de $T \cap (V_1 \times V_2)$. Soit $W \subsetneq W' \subseteq V_1 \times V_2$.

Il suffit de montrer que $\mathrm{cd}(W') > \mathrm{cd}(W)$, car W est alors cd-maximale (et T son tore minimal).

Supposons que tout soit défini sur $K = \mathrm{acl}(K)$. Soit $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ un point K-générique dans W'. Alors on a $\mathrm{cd}(W') = \mathrm{l.\,dim}(\bar{g}_1, \bar{g}_2/K) - \mathrm{tr.\,deg}(\bar{g}_1, \bar{g}_2/K)$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{cd}(W') &= [\mathrm{l.\,dim}(\bar{g}_1/K) - \mathrm{tr.\,deg}(\bar{g}_1/K)] \\ &\quad + [\mathrm{l.\,dim}(\bar{g}_2/K\bar{g}_1) - \mathrm{tr.\,deg}(\bar{g}_2/K\bar{g}_1)] \\ &= \mathrm{cd}(W) + \mathrm{l.\,dim}(\bar{g}_2/K\bar{g}_1) - \mathrm{tr.\,deg}(\bar{g}_2/K\bar{g}_1) \\ &> \mathrm{cd}(W) - \delta(\bar{g}_2/K\bar{g}_1) \geq \mathrm{cd}(W).\end{aligned}$$

Collapse sur un mauvais corps

À l'aide des *suites aux différences* (version multiplicativement moyennée des pseudo-suites de Morley) et d'une fonction μ convenable, on définit une classe $(\mathcal{U}_\mu, \leq)$.

Ensuite, on établit un **Lemme combinatoire** approprié, et on en déduit :

Corollaire. *La classe $(\mathcal{U}_\mu, \leq)$ a la propriété d'amalgamation. Il y a donc une (unique) limite de Fraïssé-Hrushovski $(K_\mu, \ddot{U})$ qui est homogène-universelle et dénombrable.*

Corollaire. *Pour tout $\alpha \in \mathcal{C}_b$, il existe un énoncé χ_α t.q. pour tout $M \in \mathcal{U}_\mu$ on ait $M \models \chi$ ssi $M' \notin \mathcal{U}_\mu$ pour toute extension préalgébrique minimale M'/M donnée par une instance de α.*

AXIOMES pour la théorie $\mathbf{T}_\mu$:

$M = (K, \ddot{U}) \models T_\mu$ ssi

– $M \in \mathcal{U}_\mu$, c.à.d.
  - $M \in \mathcal{U}_0$ et
  - pour tout $\alpha \in \mathcal{C}_b$, K ne contient pas de suite aux différences de longueur $\mu(\alpha) + 1$ pour α.

– $M' \notin \mathcal{U}_\mu$ pour toute extension préalgébrique M'/M (ça se dit à l'aide des χ_α)

Lemme. *Les structures riches dans $\mathcal{U}_\mu$ sont exactement les modèles ω-saturés de T_μ.*

Théorème. *Le rang de Morley de $T_\mu = \mathrm{Th}((K_\mu, \ddot{U}))$ est égal à 2, avec $\ddot{U}$ fortement minimal (irréductible de rang 1). Plus généralement, on a $\mathrm{MR}(\bar{a}/B) = \mathrm{d}(\bar{a}/B)$. La structure $(K_\mu, \ddot{U})$ est donc un mauvais corps.*

Remarque. *Pour tout nombre entier $n > 1$, on peut construire un mauvais corps $(K, \ddot{U})$ tel que $\mathrm{MR}(K) = n$ et $\mathrm{MR}(\ddot{U}) = n - 1$ (ou $\mathrm{MR}(\ddot{U}) = 1$).*