

Triangulation p -adique

Luck Darnière

Séminaire Géométrie et Théorie des Modèles du 28/04/2017

Avertissement : Ce document a été réalisé à partir de la présentation beamer utilisée pour l'exposé, grâce au package 'beamerarticle' de L^AT_EX. Il se peut que cette conversion automatique provoque quelques erreurs dûes aux recouvrements. En cas de doute, se référer à la version sur arXiv : *Semi-algebraic triangulation over p -adically closed fields*.

1 Introduction

1.1 Ensembles semi-algébriques

K un corps quelconque.

$$\mathbf{P}_N := \{y^N / y \in K\} \quad (\mathbf{P}_N^\times := P_N \setminus \{0\}).$$

$A \subseteq K^m$ est **semi-algébrique** s'il est réunion finie d'ensembles définis par :

$$f_1 = \dots = f_r = 0 \text{ et } g_1 \in P_{N_1}^\times \text{ et } \dots \text{ et } g_s \in P_{N_s}^\times.$$

avec les $f_i, g_i \in K[X_1, \dots, X_m]$.

Remarques

- Si K est algébriquement clos, $f(x) \in P_N^\times \iff f(x) \neq 0$.
- Si K est réel clos :

$$f(x) \in P_{2n}^\times \iff f(x) > 0.$$

$$f(x) \in P_{2n+1}^\times \iff f(x) \neq 0,$$

1.2 Corps p -adiquement clos

Exemples

- Toute extension finie K_0 de \mathbf{Q}_p .
- La clôture algébrique de \mathbf{Q} dans K_0 (non complet).
- Le complété pour la valuation t -adique du corps $\bigcup_{n \geq 1} K_0((t^{1/n}))$ des séries de Puiseux sur K_0 (groupe des valeurs $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$).

K est **p -adiquement clos** s'il est de caractéristique nulle et muni d'une valuation v telle que :

1. (K, v) est hensélien.
2. Le corps résiduel de (K, v) est fini, de caractéristique p .
3. Le groupe des valeurs $\mathcal{Z} = v(K^\times)$ est un **\mathbf{Z} -groupe** :
 - i) \mathcal{Z} possède un plus petit élément > 0 ;
 - ii) $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z} \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

1.3 Élimination des quantificateurs

Théorème 1 (Chevalley (19??), Tarski (1948), Macintyre (1976))

Si K est algébriquement clos, réel clos ou p -adiquement clos, alors la projection sur K^m de tout semi-algébrique $A \subseteq K^{m+1}$ est encore semi-algébrique.

Le théorème montre que dans ces trois cas :

- En partant des ensembles algébriques (définis par $f = 0$ avec f pol.) et en stabilisant par opérations booléennes et projections, on obtient *exactement* les ensembles semi-algébriques.
- $A \subseteq K^m$ est semi-algébrique $\iff A$ est définissable (dans le langage des anneaux).

1.4 Quelle triangulation ?

Une application $\varphi : A \subseteq K^m \rightarrow K^n$ est **semi-algébrique** si son graphe est semi-algébrique.

Théorème 2 *Soit K un corps réel clos. Tout semi-algébrique $A \subseteq K^m$ est semi-algébriquement homéomorphe à la réunion d'un complexe simplicial.*

But

Obtenir la même chose pour un corps p -adiquement clos.

Ingrédients

- Décomposition cellulaire.
- Lemme de bonne direction.
- Simplexe (faces, découpage...).

2 Complexes simpliciaux

2.1 Complexes

Soit X un espace topologique, et \mathcal{A} une famille *finie* de parties de X .

L'**ordre de spécialisation** sur \mathcal{A} est défini par

$B \leq A \iff B \subseteq \bar{A}$.
 \mathcal{A} est un **complexe** de X si :

1. \mathcal{A} est une *partition* d'un ensemble $E \subseteq X$;
2. tout $A \in \mathcal{A}$ est relativement ouvert (*i.e.* $\bar{A} \setminus A$ est fermé) et

$$\bar{A} \cap E = \bigcup \{B \in \mathcal{A} / B \leq A\}.$$

NB : $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap E = \bigcup \{B \in \mathcal{A} / B \leq A_1 \text{ et } B \leq A_2\}$.

Si de plus $\{B \in \mathcal{A} / B \leq A\}$ est une chaîne pour tout $A \in \mathcal{A}$ (autrement dit si \mathcal{A} est un arbre) alors \mathcal{A} est un **monoplexe**.

2.2 Cas réel

Un **polytope réel** A est l'enveloppe convexe *stricte* d'une partie finie $A_0 \subseteq \mathbf{R}^q$ (on exclut de A les points de ses faces propres, qui constituent sa frontière ∂A).

C'est un **simplexe** si l'on peut choisir les points de A_0 affinement indépendants.

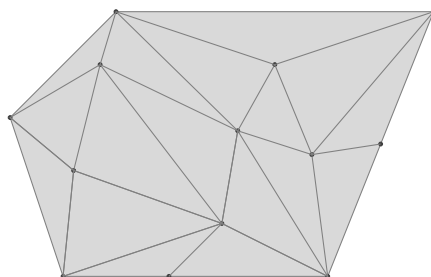
Propriétés 1 Soit $A \subseteq \mathbf{R}^q$ un polytope réel.

1. A est relativement ouvert et précompact.
2. A est défini par des inégalités sur des fonctions affines.
3. Les faces de A sont des polytopes.
4. Elles forment un complexe qui partitionne \bar{A} .

Les **facettes** d'un polytope sont ses faces propres maximales (pour l'ordre de spécialisation).

Proposition 1 Soit $A \subseteq \mathbf{R}^q$ un polytope réel.

1. Le nombre de facettes de A est $\geq \dim(A) + 1$.
2. Il y a égalité $\iff A$ est un simplexe.



Découpage barycentrique d'un polytope en complexe simplicial.

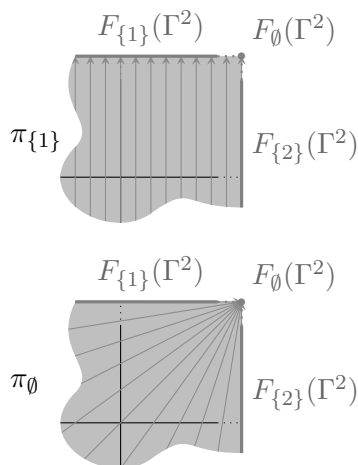
NB : En particulier, toute décomposition des faces propres de A en un complexe simplicial « se relève » en un découpage de \bar{A} en complexe simplicial.

2.3 Cas discret

Toutes les notions liées aux polytopes réelles sont définies à partir de l'ordre. Un corps p -adiquement clos n'est pas ordonné, mais il y a un ordre sur son groupe des valeurs. Nous allons donc commencer par définir les polytopes dans \mathcal{Z}^q .

On se place dans le cas $\mathcal{Z} = \mathbf{Z}$, mais tout \mathbf{Z} -groupe ferait l'affaire.

- $\Gamma := \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$.
- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\text{Supp } a := \{i \in \{1, \dots, q\} / a_i < +\infty\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$, $\mathbf{F}_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q / \text{Supp } a = I\}$.
- $\pi_I :=$ la projection de Γ^q sur $\{a \in \Gamma^q / \text{Supp } a \subseteq I\}$.



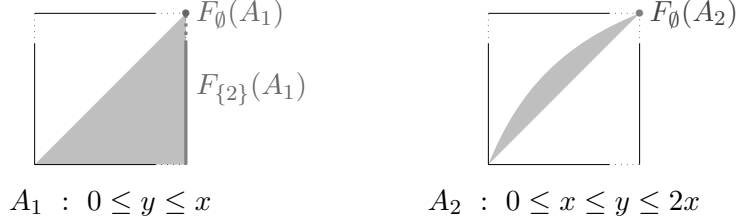
Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

On introduit maintenant la topologie des faces :

- Pour tous $a, b \in \Gamma^q$, $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max_{1 \leq i \leq q} |2^{-a_i} - 2^{-b_i}|$.
- Pour tout $A \subseteq \Gamma^q$ et $I \subseteq \{1, \dots, q\}$:

$$\mathbf{F}_I(\mathbf{A}) := \{a \in \bar{A} / \text{Supp } a = I\} = \bar{A} \cap F_I(\Gamma^q)$$

est la **face** de A de support I (si non vide).



NB₁ : Les parties minorées de Γ^q sont pré-compactes.

NB₂ : Les faces de $A \subseteq \mathbf{Z}^3$ ne forment pas un complexe en général !

$A \subseteq \mathbf{Z}^q$ est **semi-linéaire mod N** s'il est défini par

$$f_1(x) \geq 0 \text{ et } \dots \text{ et } f_r(x) \geq 0 \text{ et } g_1(x) \in N\mathbf{Z} \text{ et } g_s(x) \in N\mathbf{Z}$$

avec les f_i, g_j \mathbf{Z} -affines.

A est **semi-linéaire** si $N = 1$ (congruences superflues).

Mêmes définitions pour $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, en identifiant $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbf{Z}^{\text{Card } I}$.

Exemple

Les conditions suivantes :

$$0 \leq x \leq y \leq 2x \text{ et } z = 2x - 2y.$$

définissent une partie A de \mathbf{Z}^3 semi-linéaire.

Par contre $F_{\{3\}}(A) = \{+\infty\} \times \{+\infty\} \times 2\mathbf{N}$ est semi-linéaire mod 2.

Proposition 2 Soit $A \subseteq \mathbf{Z}^q$ semi-linéaire mod N . Soient $I, J \subseteq \{1, \dots, q\}$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ sont non vides.

1. $F_I(A) = \pi_I(A)$ est le projeté de A sur $F_I(\Gamma^q)$.
2. $F_J(A) \leq F_I(A) \iff J \subseteq I$. Dans ce cas $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
3. $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$.

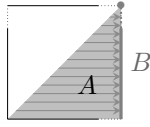
Il s'ensuit que les faces propres de A forment un demi-treillis inférieur distributif qui partitionne ∂A .

Problèmes

- Les faces d'un semi-linéaires (mod N) ne sont pas semi-linéaires (mod N') en général. Elles sont **de Presburger** (= réunion finie de semi-linéaires mod N').
- Si $A \subseteq \mathbf{Z}^q$ est de Presburger, la proposition n'est plus vraie.

Pour résoudre ces difficultés, on va se restreindre à la définition des polytopes discrets à une notion plus restrictive que celle des semi-linéaires. Les conditions supplémentaires que nous allons introduire serviront à garantir que les faces d'un polytope sont encore des polytopes. Mais comme les polytopes seront un cas particulier d'ensembles semi-linéaires, ils conserveront toutes les bonnes propriétés de la proposition 2.

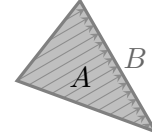
Proposition 3 (Dichotomie) *Soit $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$ semi-linéaire mod N . Soit B une face propre de A , et $f : A \cup B \rightarrow \Gamma$ une fonction continue sur $A \cup B$ et \mathbf{Q} -affine sur A .*



- Si $f(b) = +\infty$ en un point $b \in B$ alors $f|_B = +\infty$.
- Sinon, $f|_B$ est \mathbf{Q} -affine et $f|_A = f|_B \circ \pi_B$.

NB : Soit $A \subseteq \mathbf{R}^q$ un polytope réel, B une face propre de A et $\varepsilon : A \cup B \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ une fonction continue sur $A \cup B$.

- Si ε s'annule en un point $b \in B$ alors $\varepsilon|_B = 0$.
- Sinon $\varepsilon(a) = \varepsilon(b)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$.
 $\varepsilon|_A = \varepsilon|_B \circ \pi_B$.



Nous pouvons maintenant définir les polytopes discrets comme suit.

- Le **socle** de $A \subseteq \Gamma^{q+1}$ est son projeté \widehat{A} sur Γ^q .
- La distance $\delta : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}_+$ se prolonge à $\Omega := \mathbf{Q} \cup \{+\infty\}$.
- $f : X \subseteq \Gamma^q \rightarrow \Omega$ est **largement continue** si elle se prolonge en une application continue sur \overline{X} .
- Un **polytope discret** est : \mathbf{Z}^q ou une partie $A \subseteq \mathbf{Z}^{q+1}$ telle que \widehat{A} est un polytope discret et A est l'ensemble des $(x, t) \in \mathbf{Z}^{q+1}$ tels que

$$x \in \widehat{A} \text{ et } \mu(x) \leq t \leq \nu(x)$$

où $\mu, \nu : \widehat{A} \rightarrow \Omega$ sont \mathbf{Q} -affines (ou $+\infty$), *largement continues* et *positives*. Un tel couple (μ, ν) est une **présentation** de A .

- Se généralise à $A \subseteq F_I(\Gamma^{q+1})$, en identifiant $F_I(\Gamma^{q+1}) \simeq \mathbf{Z}^{\text{Card } I}$.

NB : Tout polytope discret est semi-linéaire et pré-compact.

En particulier, pour toute face $B = F_J(A)$ on a $B = \pi_J(A)$.

On note alors $\pi_B := \pi_J$ la **projection de A sur B** .

Proposition 4 *Soit $A \subseteq F_I(\Gamma^{q+1})$ un polytope et $B = F_J(A)$ une face de A .*

1. $\widehat{B} = F_{\widehat{J}}(\widehat{A})$ avec $\widehat{J} := J \setminus \{q+1\}$.
2. Soient (μ, ν) une présentation de A . Alors B est l'ensemble des $(x, t) \in F_J(\Gamma^{q+1})$ tels que :

$$x \in \widehat{B} \text{ et } \bar{\mu}(x) \leq t \leq \bar{\nu}(x).$$

B est donc un polytope et $(\bar{\mu}, \bar{\nu})|_{\widehat{B}}$ une présentation de B .

Rappel

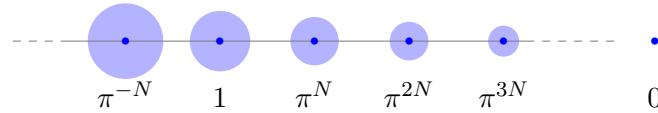
Les simplexes réels sont, parmi les polytopes de dimension donnée, ceux dont le nombre de facettes est minimal.

Un polytope discret est un **simplexe** s'il a au plus une facette, qui est un simplexe. Autrement dit c'est un simplexe si ses faces forment une chaîne.

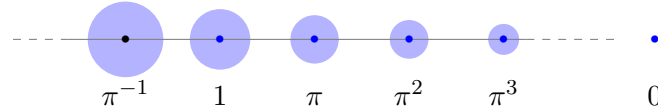
2.4 Cas p -adique

On prend $K =$ une extension finie de \mathbf{Q}_p (mais tout corps p -adiquement clos conviendrait). On a donc $v(K) = \Gamma = \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$.

- $\mathbf{R} :=$ l'anneau de la valuation p -adique.
- $\pi :=$ un générateur de l'idéal maximal de R .
- Pour tout $x \in K^q$, $\|\mathbf{x}\| := \max_{1 \leq i \leq m} 2^{-v(x_i)}$.
- $\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) := \{y \in K^q / \|x - y\| \leq \|r\|\}$.
- $\mathbf{Q}_{N,M} := \bigcup_{k \in \Gamma} \pi^{Nk}(1 + \pi^M R) = \bigcup_{k \in \Gamma} B(\pi^{Nk}, \pi^{Nk+M})$.



NB : $\{\pi^k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ n'est pas semi-algébrique, mais $Q_{1,M}^\times$ est un voisinage semi-algébrique de $\{\pi^k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ (et un sous-groupe de K^\times d'indice fini).

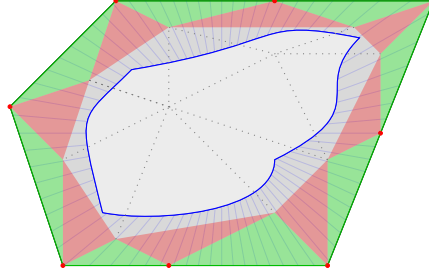


$$\mathbf{D}^M \mathbf{R} := Q_{1,M} \cap R.$$

Un **polytope p -adique** est la pré-image par la valuation p -adique, restreinte à $Q_{1,M}^q$ (ou de manière équivalente à $D^M R^q$), d'un polytope discret (dans Γ^q). Idem pour les **simplexe p -adique**.

NB : Les polytopes p -adiques héritent de toutes les bonnes propriétés des polytopes discrets (faces, projections, présentations...).

2.5 Découpage



A est un polytope. \mathcal{T} est un complexe simplicial qui raffine celui des faces propres de A . $\varepsilon : \partial A \rightarrow K^\times$ limite la distance au bord : pour tout $T \in \mathcal{T}$, $V_T := \{a \in A / \|a - \pi_T(a)\| \leq \|\varepsilon(\pi_T(a))\|\}$ définit un « voisinage de V_T dans A ». Chaque $T \in \mathcal{T}$ est « élargi » dans V en un simplexe S_T de facette T . Le reste de A est découpé en simplexes ouverts-fermés.

Théorème 3 (de découpage monotopique avec contrainte) *Soit A un polytope de $D^M R^q$ et \mathcal{T} un complexe simplicial qui raffine le complexe des faces propres de A . Soit $\varepsilon : \partial A \rightarrow K^\times$ une fonction semi-algébrique telle que la restriction de $\|\varepsilon\|$ soit continue sur chaque face propre de A . Alors il existe un complexe simplicial \mathcal{S} dans $D^M R^q$ tel que :*

1. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ et $\bigcup \mathcal{S} = \overline{A}$;
2. $\forall T \in \mathcal{T}$, il existe un unique $S_T \in \mathcal{S}$ inclus dans A de facette T ;
3. $\forall a \in S_T$, $\|a - \pi_T(a)\| \leq \|\varepsilon(\pi_T(a))\|$;
4. les autres $S \in \mathcal{S}$ sont ouverts-fermés.

3 Principaux résultats

3.1 Triangulation p -adique et monomialisation

Un **complexe simplicial d'indice M** est une famille finie $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ où chaque \mathcal{T}_i est un complexe simplicial dans $D^M R^{q_i}$.

On note $\bigsqcup \mathcal{T}$ la réunion disjointe des $\bigcup \mathcal{T}_i$.

Théorème 4 (de triangulation p -adique I) *Pour tout semi-algébrique $A \subseteq K^m$, il existe un complexe simplicial \mathcal{T} d'indice M et un homéomorphisme semi-algébrique $\varphi : \bigsqcup \mathcal{T} \rightarrow A$.*

En outre l'entier M peut être choisi arbitrairement grand.

NB : Marche aussi pour une famille finie $(A_i)_{i \in I}$ de semi-algébriques.

$$- \mathbf{U}_e := \{x \in K / x^e = 1\}.$$

$$- \mathbf{U}_{e,n} := U_e \cdot (1 + \pi^n R) = \bigcup_{e \in U_e} B(e, \pi^n)$$

NB : $U_{e,n}$ est un sous-groupe de K^\times et un voisinage de U_e .

f est **N -monomiale mod $U_{e,n}$** sur une partie $S \subseteq K^q$ s'il existe $u : S \rightarrow U_{e,n}$ semi-algébrique, $\xi \in K$ et $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\forall x \in S, \quad f(x) = u(x) \cdot \xi \cdot \prod_{i=1}^q x_i^{N\beta_i} \quad \forall x \in S, \quad f(x) = u(x) \cdot \underbrace{\xi \cdot \prod_{i=1}^q x_i^{N\beta_i}}_{g(x)}$$

NB : Cela revient à dire qu'il existe g , N -monomiale sur S , et $\chi : S \rightarrow U_e$ semi-algébrique telles que

$$\left\| \frac{f}{g\chi} - 1 \right\| \leq \|\pi^n\|.$$

Théorème 5 (de triangulation p -adique II) *Soient $(\theta_i : A_i \subseteq K^m \rightarrow K)_{i \in I}$ une famille finie de fonctions semi-algébriques et n, N des entiers ≥ 1 . Il existe un complexe simplicial \mathcal{T} d'indice M et un homéomorphisme semi-algébrique $\varphi : \bigsqcup \mathcal{T} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tel que pour tout $i \in I$:*

1. $\{\varphi(T) / T \in \mathcal{T} \text{ et } \varphi(T) \subseteq A_i\}$ est une partition de A_i .
2. $\forall T \in \mathcal{T}$ tel que $\varphi(T) \subseteq A_i$, $\theta_i \circ \varphi|_T$ est N -monomiale mod $U_{e,n}$.

En outre les entiers e, M peuvent être choisis arbitrairement grands.

On note \mathbf{T}_m cet énoncé.

(\mathcal{T}, φ) est une **N -monomialisation (mod $U_{e,n}$ et d'indice N)** des θ_i .

NB : Les applications qui suivent se déduisent de \mathbf{T}_m à m fixé.

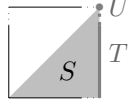
3.2 Relèvement

Proposition 5 *Soit $\eta : A \subseteq K^m \rightarrow K$ une application semi-algébrique telle que $\|\eta\|$ est continue. Alors il existe $h : A \subseteq K^m \rightarrow K$ semi-algébrique et continue telle que $\|h\| = \|\eta\|$.*

Preuve (esquisse)

\mathbf{T}_m ramène au cas où :

- $A = \overline{S}$ avec S simplexe de $D^M R^q$;
- $\eta : \overline{S} \rightarrow K$ est 1-monomiale mod $U_{e,1}$ sur chaque face de S .



- $v(\eta(x, y)) = \alpha_0 + \alpha_1 v(x) + \alpha_2 v(y)$ sur S ;
- $v(\eta(+\infty, y)) = \beta_0 + \beta_2 v(y)$ sur T ;
- $v(\eta(+\infty, +\infty)) = +\infty$ sur U .

On a $\eta^*(v(x), v(y)) = v(\eta(x, y))$ où $\eta^* : v(\overline{S}) \rightarrow \mathbf{Z}$ définie par :

- $\eta^*(x', y') = \alpha_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y'$ sur $v(S)$;
- $\eta^*(+\infty, y') = \beta_0 + \beta_2 y'$ sur $v(T)$.
- $\eta^*(+\infty, +\infty) = +\infty$ sur $v(U)$.

Comme η^* est continue sur $v(S) \cup v(T)$, \mathbf{Z} -affine sur $v(S)$ et $\eta^* \neq +\infty$ sur $v(T)$, par dichotomie $\eta^*_{v(S)} = \eta^*_{v(T)} \circ \pi_{\{2\}}$. Donc pour tout $(x, y) \in S \cup T$:

$$v(\eta(x, y)) = \eta^*(v(x), v(y)) = \eta^*(+\infty, v(y)) = \beta_0 + \beta_2 v(y).$$

Il suffit donc de poser $h(x, y) = \pi^{\beta_0} y^{\beta_2}$ sur $S \cup T$, et $h = 0$ sur U .

3.3 Rétraction

Une **rétraction** de $A \subseteq K^m$ (non vide) sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \rightarrow B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB : Si une telle rétraction existe alors B est fermé dans A .

Proposition 6 Soient $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques non vides. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur $B \iff B$ est fermé dans A .

Preuve (esquisse)

\mathbf{T}_m ramène au cas où $A = \overline{S}$ et $B = \overline{T}$ avec S un simplexe et T une face de S . On prend $\rho = \pi_T$.

3.4 Découpage

Proposition 7 Soit $A \subseteq K^m$ semi-algébrique relativement ouvert et sans points isolés. Soient X_1, \dots, X_r des semi-algébriques fermés tels que $X_1 \cup \dots \cup X_r = \partial A$.

Alors il existe une partition de A en semi-algébriques A_1, \dots, A_r tels que $\partial A_k = X_k$ pour $1 \leq k \leq r$.

Preuve (esquisse)

\mathbf{T}_m ramène au cas où A est un simplexe de $D^M R^q$. Pour simplifier supposons $r = 2$ et $X_1 = X_2 = \overline{B}$ où B est la facette de A .

Soit $i \in \text{Supp } A \setminus \text{Supp } B$. Il suffit de prendre :

$$A_1 = \{a \in A / v(a_i) \in 2\mathbf{N}\} \quad A_2 = A \setminus A_1.$$

4 La longue marche vers la triangulation

4.1 Décomposition cellulaire

Rappel :

$$\mathbf{Q}_{N,M} := \{0\} \cup \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} B(\pi^{kN}, \pi^{kN+M}) \quad (\mathbf{Q}_{N,M}^\times := Q_{N,M} \setminus \{0\})$$

$$\text{NB} : D^M R^q = (Q_{1,M} \cap R)^q.$$

Propriétés 2 1. $Q_{N,M}^\times$ est un sous-groupe de K^\times , ouvert et d'indice fini.

2. $Q_{N',M'}^\times \subseteq Q_{N,M}^\times$ dès que $N|N'$ et $M \leq M'$.

3. $Q_{N,M}^\times \subseteq P_N^\times$ dès que $2v(N) < M$.

4. $x \mapsto x^{\frac{1}{e}}$ est bien définie sur $Q_{N,M}$ dès que $e|N$ et $2v(e) < M$.

Soit G un sous-groupe de K^\times , semi-algébrique, ouvert et d'indice fini. Typiquement $G = P_N^\times$ ou $G = Q_{N,M}^\times$.

— Une **cellule mod G** est une partie non vide $A \subseteq K^{m+1}$ telle que $(x, t) \in A$ ssi :

$$\|\nu(x)\| \leq \|t - c(x)\| \leq \|\mu(x)\| \quad \text{et} \quad t - c(x) \in \lambda G$$

où $\lambda \in K$, le **centre** $c : \widehat{A} \rightarrow K$ et les **bornes** $\mu, \nu : \widehat{A} \rightarrow K \cup \{\infty\}$ sont semi-algébriques ou égales à ∞ (où $v(\infty) = -\infty$).

— Un tel triplet (c, μ, ν) est une **présentation** de D .

— D est **largement continue** si c, μ, ν le sont.

Théorème 6 (Denef (1984)) 1. Toute partie semi-algébrique $A \subseteq K^{m+1}$ admet (pour un certain N) une partition finie en cellules mod P_N^\times .

2. Soit $\theta : A \rightarrow K$ semi-algébrique. Il existe $e, n \in \mathbf{N}^*$ et une partition finie \mathcal{D} de A en cellules mod $Q_{N,M}^\times$ avec $e|N$ et $M > 2v(e)$ telle que :

$$\forall (x, t) \in D \in \mathcal{D}, \quad \theta(x, t) = u_D(x, t) h_D(x) [\lambda_D^{-1} (t - c_D(x))]^{\frac{\alpha_D}{e}}$$

où $\alpha_D \in \mathbf{Z}$, $h_D : \widehat{D} \rightarrow K$ et $u_D : D \rightarrow U_{e,n}$ semi-algébrique.

Remarque

Ce théorème ne dit rien sur la façon dont les cellules se « touchent » :

- Les bornes et centres des cellules D peuvent être choisies continues, mais *pas largement continues*.
- \mathcal{C} n'est pas un complexe.

4.2 Bonne direction

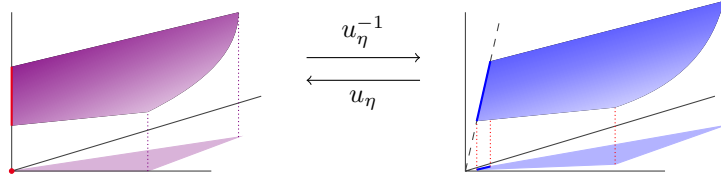
Pour tout $\eta \in K^m$, soit u_η l'automorphisme linéaire de K^{m+1} défini par

$$\mathbf{u}_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) := (x + t\eta, t).$$

NB : La déformation induite par u_η est d'autant plus faible que η est petit ($\|u_\eta - \text{Id}\| = \|\eta\|$).

Exemple

$A := \{(x, y, y/x) / 0 < \|y\| \leq \|x\| \leq 1\}$ ne peut pas être décomposé en cellules largement continues. En revanche $u_\eta^{-1}(A)$ peut l'être pour presque tout $\eta \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Lemme 1 (en supposant \mathbf{T}_m) Soit $\theta : A \subseteq K^{m+1} \rightarrow K$ semi-algébrique sur A borné.

$\exists e \in \mathbf{N}^*$, $\forall n, N \in \mathbf{N}^*$, $\exists \eta \in K^m$ tel que $u_\eta^{-1}(A)$ admet une partition finie \mathcal{D} en cellules mod Q_{N_0, M_0} largement continues ($M_0 > 2v(e)$ et $eN | N_0$) telles que pour tout $D \in \mathcal{D}$:

$$\forall (x, t) \in D, \quad \theta \circ u_\eta(x, t) = u_D(x, t) h_D(x) [\lambda_D^{-1}(t - c_D(x))]^{\frac{\alpha_D}{e}}.$$

où $\alpha_D \in \mathbf{Z}$, $h_D : \widehat{D} \rightarrow K$ et $u_D : D \rightarrow U_{e, n}$ sont semi-algébriques.

NB₁ : Marche aussi bien pour une famille finie $(\theta_i : A_i \subseteq K^{m+1} \rightarrow K)_{i \in I}$.

NB₂ : Les entiers e, M peuvent être pris arbitrairement grands, et l'ensemble des η ayant cette propriété est dense dans K^m .

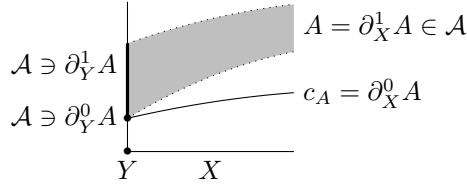
4.3 Monoplexe cellulaire

Soit \mathcal{A} une partition finie de R^{m+1} en cellules mod G , largement continues dont les socles sont pur-dimensionnels et relativement ouverts (\Rightarrow les $A \in \mathcal{A}$ le sont aussi).

$$\widehat{\mathcal{A}} := \{\widehat{A} / A \in \mathcal{A}\}.$$

A est un **monoplexe cellulaire mod G** si de plus $\widehat{\mathcal{A}}$ et \mathcal{A} sont des monoplexes, et si pour tout $A \in \mathcal{A}$ de socle X et tout $Y \in \widehat{\mathcal{A}}$ inclus dans \overline{X} :

- si $\bar{\nu}_A \neq 0$ sur Y alors $\partial_Y^0 A := \overline{\text{Gr } c_A} \cap (Y \times K) = \text{Gr } \bar{c}_A|_Y \in \mathcal{A}$;
- si $\bar{\mu}_A \neq 0$ sur Y alors $\partial_Y^1 A := [\overline{A} \cap (Y \times K)] \setminus \partial_Y^0 A \in \mathcal{A}$.



NB : Si \mathcal{A} est un monoplexe cellulaire mod G , pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a :

$$B \leq A \implies (c_B, \mu_B, \nu_B) = (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A)|_{\widehat{B}}$$

Lemme 2 (en supposant \mathbf{T}_m) Soit \mathcal{A} une partition finie de R^{m+1} en cellules mod G largement continues, et \mathcal{H} une famille finie de fonctions semi-algébriques $h : X \subseteq R^m \rightarrow K$.

Il existe :

- un monoplexe cellulaire \mathcal{D} mod G raffinant \mathcal{A} ;
- une N -monomialisation $\psi : \biguplus \mathcal{S} \rightarrow R^m$ (mod $U_{e,n}$ et d'indice M) des $h \in \mathcal{H}$ et des $\{c_D, \mu_D, \nu_D\}_{D \in \mathcal{D}}$ telle que $\widehat{\mathcal{D}} = \{\psi(S) / S \in \mathcal{S}\}$.

4.4 $\mathbf{T}_m \Rightarrow \mathbf{T}_{m+1}$

On se donne $\theta : E \subseteq K^{m+1} \rightarrow K$ semi-algébrique et $n, N \in \mathbf{N}^*$.

1. On se ramène à $E \subseteq R^{m+1}$, puis à $E = R^{m+1}$.
2. La décomposition cellulaire + les deux lemmes (avec \mathbf{T}_m) donnent, après déformation le long d'une bonne direction :
 - \mathcal{A} = un monoplexe cellulaire mod Q_{N_0, M_0}^\times partitionnant R^{m+1} ;

— $(\psi, \mathcal{S}) =$ une triangulation d'indice M_1 de R^{m+1} ;

tels que $\widehat{\mathcal{A}} = \{\psi(S)\}_{S \in \mathcal{S}}$ et que les conditions suivantes sont satisfaites.

$$\begin{array}{ccc}
 & K \xleftarrow{\theta} A & \\
 & \downarrow & \\
 A = \text{cellule mod } Q_{N_0, M_0}^\times & & \\
 e_0 N | N_0 \text{ et } M_0 > 2v(e_0). & & \widehat{A} \xleftarrow[\psi]{\sim} S \subseteq F_J(D^{M_1} R^q)
 \end{array}$$

— $\forall (x, t) \in A, \quad \theta(x, t) = u(x, t)h(x)[\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{\alpha}{e_0}}$ avec $h : \widehat{A} \rightarrow K$ et $u : A \rightarrow U_{e_0, n}$ semi-algébriques ;

— $(c_A, \mu_A, \nu_A, h) \circ \psi$ N_0 -monomiales mod $U_{e_1, n}$.

En outre e_1 et M_1 peuvent être choisis arbitrairement grands.

3. On pose $M_2 = M_1 + v(N_0)$.

M_1 assez grand $\Rightarrow M_2 > 2v(N_0)$ et $M_2 > M_0$.

En particulier $Q_{N_0, M_2}^\times \subseteq Q_{N_0, M_0}^\times$.

On découpe A en cellules D mod Q_{N_0, M_2}^\times (même centre et bornes).

On obtient donc un monoïde cellulaire \mathcal{D} mod Q_{N_0, M_2}^\times partitionnant R^{m+1} tel que $\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{A}} = \{\psi(S)\}_{S \in \mathcal{S}}$ qui hérite de \mathcal{A} les propriétés suivantes.

$$\begin{array}{ccc}
 & K \xleftarrow{\theta} D \xleftarrow[\varphi]{\sim} T \subseteq F_{J'}(D^{M_1} R^{q'}) & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 D = \text{cellule mod } Q_{N_0, M_2}^\times & & \widehat{D} \xleftarrow[\psi]{\sim} S \subseteq F_J(D^{M_1} R^q) \\
 e_0 N | N_0 \text{ et } M_2 > 2v(N_0). & &
 \end{array}$$

— $\forall (x, t) \in D, \quad \theta(x, t) = u(x, t)h(x)[\lambda_D^{-1}(t - c_D(x))]^{\frac{\alpha}{e_0}}$ avec $h : \widehat{D} \rightarrow K$ et $u : D \rightarrow U_{e_0, n}$ semi-algébriques ;

— $(c_D, \mu_D, \nu_D, h) \circ \psi$ N_0 -monomiales mod $U_{e_1, n}$.

— Le but du jeu est de construire pour chaque $D \in \mathcal{D}$ un simplexe T et un homéomorphisme φ comme dans le diagramme, de sorte que tous ces T forment un complexe simplicial sur lequel φ soit globalement continue.

4. Si $D = \text{Gr } c_D$, on pose $T = S$ et $\varphi(s) = (\psi(s), c_A(s))$.

On a bien $\varphi(T) = \text{Gr } c_A = A$.

Comme dans ce cas $\theta(x, t) = \theta(x, c_A(x)) = u(\dots)h(x)$ il vient que $\theta \circ \varphi(s) = u(\dots)h \circ \psi(s)$ est N_0 -monomiale mod $U_{e_1, n}$.

5. Sinon, soit $T \subseteq F_{J \cup \{q+1\}}(D^{M_1} R^{q+1})$ défini par $(s, t) \in T$ si :

$$s \in S \quad \text{et} \quad \frac{v(\lambda_D^{-1} \mu_D \circ \psi(s))}{N_0} \leq v(t) \leq \frac{v(\lambda_D^{-1} \nu_D \circ \psi(s))}{N_0}$$

Soit $\varphi : (s, t) \mapsto (x', t') := (\psi(s), c_D(\psi(s)) + \lambda_D t^{N_0})$.

Il reste à vérifier que cette construction a toutes les propriétés voulues.

Par le lemme de Hensel, $M_1 > v(N_0) \Rightarrow$ l'application $(t \mapsto t^{N_0})$ est un isomorphisme de Q_{1,M_1}^\times sur $Q_{N_0, M_1+v(N_0)}^\times = Q_{N_0, M_2}^\times$.

Or $(s, t) \in T \subseteq F_{J \cup \{q+1\}}(D^{M_1} R^{q+1}) \Rightarrow t \in D^{M_1} R \setminus \{0\} = Q_{1, M_1}^\times \cap R$, donc $\varphi(s, t) = (x', t') = (\psi(s), c_D(\psi(s)) + \lambda_D t^{N_0})$ définit une bijection de T sur $\varphi(T)$.

D'autre part $t \in Q_{1, M_1}^\times \cap R \Rightarrow t' - c_D(x') = \lambda_D t^{N_0} \in \lambda_D Q_{N_0, M_2}^\times$.

Enfin :

$$\frac{v(\lambda_D^{-1} \mu_D \circ \psi(s))}{N_0} \leq v(t) \leq \frac{v(\lambda_D^{-1} \nu_D \circ \psi(s))}{N_0}$$

$$\Rightarrow v(\mu_D \circ \psi(s)) \leq v(\lambda_D t^{N_0}) \leq v(\nu_D \circ \psi(s))$$

$$\Rightarrow \|\nu_D(x')\| \leq \|t' - c_D(x')\| \leq \|\mu_D(x')\|.$$

On en déduit que $\varphi(T) \subseteq D$, et finalement que $\varphi(T) = D$.

NB : La continuité de φ sur \bar{T} , puis sur $\biguplus \mathcal{T}$, vient des propriétés des complexes simpliciaux et cellulaires.

Par construction :

$$\forall (x', t') \in D, \quad \theta(x', t') = u(x', t') h(x') [\lambda_D^{-1}(t' - c_D(x'))]_{e_0}^{\frac{\alpha}{e_0}}$$

Or $\lambda_D^{-1}(t' - c_D(x')) = t^{N_0}$ et $\theta|_D = u \cdot h \cdot (\lambda_D^{-1}(t - c_D))_{e_0}^{\frac{\alpha}{e_0}}$ donc

$$\forall (s, t) \in T, \quad \theta \circ \varphi(s, t) = u \circ \varphi(s, t) \cdot h \circ \psi(s) \cdot t_{e_0}^{\frac{\alpha N_0}{e_0}}$$

On a donc :

- $e_0 N | N_0 \Rightarrow N_0 = e_0 N k \Rightarrow t_{e_0}^{\frac{\alpha N_0}{e_0}} = t^{\alpha N k}$ est N -monomial.
- $h \circ \psi$ est N_0 -monomiale (donc N -monomiale) mod $U_{e_1, n}$ sur S .
- $u \circ \varphi(S) = u(D) \subseteq U_{e_0, n}$.

Donc $\theta \circ \varphi$ est N -monomiale mod $U_{e_0 e_1, n}$ ($\supseteq U_{e_0, n} U_{e_1, n}$).