Mordell-Lang et groupes de rang fini

Rang au sens de la Théorie des modèles

Morley ou Rang U (= Rang de Lascar)

GTM, Paris, Novembre 2016

Elisabeth Bouscaren

En collaboration avec Franck Benoist et Anand Pillay

References:

- BBP1: Semiabelian varieties over separably closed fields, maximal divisible subgroups and exact sequences, J. de l' I.M.J. 2016. (online 2014)
- BBP2: On function field Mordell-Lang and Manin-Mumford, J. of Math. Logic 2016.
- BBP3: The model theoretic socle in semi-abelian varieties (presque fini!)

Introduction, le contexte

Le contexte et les motivations: La preuve par Hrushovski (1994) de la conjecture de Mordell-Lang pour les corps de fonctions, restée lontemps la seule preuve complète en caractéristique p.

Motivations:

1. Etudier et comprendre la théorie des modèles des groupes définissables introduits dans cette preuve et ses conséquences algébriques [BBP1].
2. Essayer de trouver une nouvelle preuve (modèle-théorique) en caractéristique p , en évitant en particulier le théorème de Trichotomie pour les géométries de Zariski (Hrushovski-Zilber): (fait de manière géométrique par Rössler et al en 2013), puis dans [BBP2] fait pour les variétés abéliennes (et pas semiabéliennes) définies sur le corps $\mathbb{F}_p(t)^{sep}$.

3. Ensuite, passer des variétés abéliennes au variétés semiabéliennes (au moins pour le cas traité dans [BBP2], toujours sans utiliser la Trichotomie.
Fait en général dans [BBP3] en utilisant le théorème du “socle” sur les groupes de rang (de Morley, de rang U) finis.
Cela nous a conduit à des questions sur le rôle joué dans les preuves (l'originelle de Hrushovski et la nôtre) par la notion d'orthogonalité et l'existence du Socle modèle-théorique.
C'est le sujet de cet exposé.
On se restreindra ici à la caractéristique $p > 0$, mais en fait tout ceci marche aussi en caractéristique 0.

L'énoncé de Mordell-Lang

Theorème *Mordell-Lang corps de fonctions*
$K_0 < K_1$ K_0 corps algébriquement clos, K_1 corps séparablement clos, G variété semiabélienne sur K_1, X sous-variété irreductible de G, $\Gamma \subset G(K)$ un sous groupe de "rang" fini.
On suppose que le stabilisateur de X dans G, $Stab_G(X)$ est fini et que $\Gamma \cap X$ est Zariski-dense dans X.
Alors il y a H variété semiabélienne sur K_0, Y sous-variété irreductible de H (sur K_0) et f, une isogénie de H_{K_1} dans G tels que $h(Y_{K_1}) = a + X$, $a \in G(K_1)$.

on a : G, X, objets algébriques/ constructibles
Mais Γ est juste un sous-groupe du groupe des points K-rationnels de G, $G(K)$.
"rang" fini : Γ est contenu dans l'enveloppe (p'-)divisible d'un groupe finiment engendré = il existe Γ_0 finiment engendré tel que pour tout g de Γ, il existe n (premier à p) tel que $ng \in \Gamma_0$.

Theorem *Mordell-lang corps de fonctions*
$K_0 < K_1$ K_0 corps algébriquement clos, K_1 corps séparablement clos, G variété semiabélienne sur K_1, X sous-variété irreductible de G, $\Gamma \subset G(K)$ un sous groupe de "rang" fini.
On suppose que le stabilisateur de X dans G, $Stab_G(X)$ est fini et que $\Gamma \cap X$ est Zariski-dense dans X.
Alors il y a H variété semiabélienne sur K_0, Y sous-variété irreductible de H (sur K_0) et f, une isogénie de H_{K_1} dans G tels que $h(Y_{K_1}) = a + X$, $a \in G(K_1)$.

Conclusion: La situation "descend" au petit corps K_0.
Remarque: on peut translater X en cours de preuve , même conclusion.
Si G n'a pas de sous-groupe fermé connexe qui "descend" sur K_0 (= isogène à un groupe sur K_0) , G est alors une variété abélienne de K_0-trace zero , la conclusion est $X = \{a\}$.

Les objets algébriques

Variétés à la Weil :
Variété (définie) sur K = schéma séparé de type fini réduit sur K, (on travaille sur des corps au moins séparablement clos).
Si V variété définie sur K, $V(K)$ est un ensemble définissable. Si G est un groupe algébrique sur K alors $G(K)$ est un groupe définissable dans le corps K.

A est une variété abélienne : groupe algébrique connexe complet . Ex: courbes elliptiques, Jacobiennes ...
G est une variété semiabélienne si $G \in Ext(A, T)$ i.e.
$0 \to T \to G \to A \to 0$,
avec $T \cong \mathbb{G}_m^r$ un tore et A variété abélienne.
Exemples : $T \times A$, ou G quasi-scindé (G isogène à $T \times A$) Mais le cas générique est plus compliqué les extensions quasi-scindées correspondent aux points de torsion dans $Ext(A, T)$.

Variété semiabélienne

Propriétés de G: Alors G est commutatif, la n-torsion est finie pour chaque n, $G(K^{alg})$ est un groupe divisible.
Si K est séparablement clos non parfait, en car. p, $G(K)$ est seulement p'-divisible: divisible pour les entiers premiers à p.
La Torsion de G est Zariski dense dans G . En car. p , la p'-torsion est contenue dans $G(K)$ et Zariski dense dans G.
Différences A variété abélienne est isogène à un produit $A_1 \times \ldots \times A_n$, avec A_i variété abélienne simple (pas de sous-groupe fermé connexe propre) Réductibilté de Poincaré.

La preuve de Hrushovski

Aspects remarquables:

1. uniforme en caractéristique 0 et en caractéristique p
2. preuve faite directement pour les variétés semiabéliennes sans faire de différence avec le cas variété abélienne.
3. basée sur la théorie des "Structures de Zariski" et du principe de trichotomie de ZIlber

Le théorème du Socle semble à première vue servir pour le point 3 (se ramener à des groupes de dimension un) mais en fait sert aussi pour le 1. et le 2. même si ce n'est pas complètement explicite.

Nous allons expliciter ici le point 2. en montrant comment on peut réduire ML à ML pour les variétés abéliennes grace au Socle, sans Trichotomie.

Version Théorie des modèles de Mordell-Lang en car. p

$K_0 < K_1$ on remplace par $k < K$, $K_0 < k$ $K_1 < K$ (K_1 et k linéairement disjoints sur K_0), avec K séparablement clos de degré d'imperfection 1, suffisamment saturé, et $k = K^{p^\infty} := \bigcap_n K^{p^n}$, le plus gros sous corps algébriquement clos de K, qu'on appellera le corps des constantes de K.
Les ensembles définissables dans K = la clôture des ensembles constructibles (Combinaisions booléennes finies de fermés de Zariski) par les projections.
K^{p^n} est définissable, k est infiniment définissable, un pur corps algébriquement clos: si $D \subset K^n$ est définissable, $D \cap k^n$ est un sous ensemble constructible dans k.

Le groupe $G^\sharp$

G sera une variété semiabelienne sur K,X sous variété de G sur K
$G(K)$ est un groupe définissable dans K et on pose
$G^\sharp := p^\infty G(K) = \bigcap_n p^n G(K)$, le plus gros sous-groupe divisible de $G(K)$, aussi le plus petit sous groupe inf.définissable de $G(K)$ qui est Zariski dense dans G.
$G^\sharp$ est un groupe de rang U fini , $k = (\mathbb{G}_m)^\sharp$ est de rang un, c'est-à-dire , en fait minimal = pour tout D définissable , $D \cap k$ est fini ou de complémentaire fini dans k.

Remplacer Γ

Γ a "rang" fini et $X \cap \Gamma$ dense dans X ——-> on se ramène à $X \cap G^\sharp$ est dense dans X.
$G^\sharp$ est donc de rang U fini , défini sur K , et aussi $G^\sharp$ est rigide= tout sous groupe inf.déf. connexe de $G^\sharp$ est aussi défini sur K.
on va remplacer $G^\sharp$ par un sous-groupe plus sympathique, son socle $S(G^\sharp)$.

Le Socle en théorie des modèles

Une théorie complète T stable , $\mathcal{U}$ un gros modèle de T (saturé).
Soit H un groupe infiniment définissable dans $\mathcal{U}$, commutatif
H est presque minimal, si $H(\mathcal{U}) \subset acl(F \cup Q(\mathcal{U}))$, pour F un ensemble fini, et Q un type complet minimal (de rang U 1)
H est pluriminimal si $H(\mathcal{U}) \subset acl(F \cup Q_1(\mathcal{U}) \cup \ldots \cup Q_n(\mathcal{U}))$, avec les Q_i des types minimaux..

Le socle

Le Socle 1. Il existe un sous-groupe $S(H)$ de H qui est le plus gros sous -groupe infiniment définissable, connexe et pluriminimal (=unique maximal)
2. $S(H) = B_1 + \ldots + B_m$, avec pour chaque i, B_i sous-groupe presque minimal inf. déf. connexe
3. si $i \neq j$, B_i et B_j sont orthogonaux ($B_i \perp B_j$)
Définition de $B_i \perp B_j$: tout sous-ensemble définissable de $B_i \times B_j$ est une combinaison booléenne de rectangles , c'est-à -dire d'ensembles de la forme $D_i \times D_j$, $D_i et D_j$ définissables, $D_i \subset B_i$ et $D_j \subset B_j$ (ou si $a \subset B_i$ et $b \subset B_j$ alors a et b sont indépendants au-dessus de M_0.)
décomposition maximale au sens que:
4. si B est un sous groupe inf. déf. connexe de H presque minimal, alors il existe i tel que $B \subset B_i$.
Remarque: Dans un corps algébriquement clos tout groupe algébrique est presque minimal et deux groupes ne sont jamais orthogonaux

Théorème du socle

dans l'article de Hrushovski :

Théorème du Socle Si H est un groupe infiniment définissable sur un petit modèle $M_0 \preceq \mathcal{U}$, , de rang U fini, commutatif, et si p est un type complet sur M_O, dans H , tel que $Stab_G(p)$ est fini. Supposons que le groupe $S(H)$ est rigide. Alors p est contenu dans un translaté de $S(H)$.

$Stab_G(p) = \{h \in H; h + p(\mathcal{U}) \cap p(\mathcal{U})$a même rang que $p\}$

la conclusion dit: il existe $h \in H(\mathcal{U})$ tel que $p \subset h + S(H)$.

Retour à Mordell-Lang

On reprend $k < K$, K séparablement clos de degré d'imperfection 1
G semiabélienne sur K, $X < G$, $Stab_G X$ fini , $G^\sharp$
$X \cap G^\sharp$ dense dans X
$G^\sharp$connexe infiniment définissables de rang U fini.
Le théorème du socle ———————> $X \cap S(G^\sharp)$ est Zariski dense dans $S(G^\sharp)$ donc on peut travailler avec $S(G^\sharp)$ au lieu de $G^\sharp$. Hrushovski utilise $S(G^\sharp)$ somme de groupes presque minimaux car les types minimaux sont des structures de Zariski, pour appliquer la trichotomie de Zilber et conclure.
Sans utiliser la trichotomie: théorème du socle + passage aux clotures de zariski —->
On peut supposer $X \subset \overline{S(G^\sharp)}$ et donc remplacer $G = \overline{G^\sharp}$ par $\overline{S(G^\sharp)}$.

Analyse de $S(G^\sharp)$

Donc $k < K$

On note Q_0 le (type générique du) corps des constantes k , Q_0 est un type minimal.

Donc le socle de $G^\sharp$, $S(G^\sharp) = B_{Q_0} + B_{Q_1} + \ldots + B_{Q_n}$, avec :

– Q_i sont minimaux , B_{Q_i} est l'unique sous-groupe de $G^\sharp$ maximal définissable connexe presque minimal sur Q_i

– si $i \neq j$, $B_{Q_i} \perp B_{Q_j}$

– si B est un autre sous-groupe de définissable de $G^\sharp$ connexe presque minimal, alors $B \subset B_j$ pour un j.

Analyse de $S(G^\sharp)$

– $B_{Q_0} \neq 0$, alors $B_{Q_0} = {G_0}^\sharp$ pour $G_0 < G$ maximal isogène à une variété semiabélienne S_0 sur k ($(S_0 \times_k K)$ est isogène à G_0)
– si $i > 0$, $B_{Q_i} = {A_i}^\sharp$ pour $A_i < G$ variété abélienne de k-trace zéro.
On pose $A_G = A_1 + \ldots + A_n$, A_G est dans G la variété abélienne maximale de k-trace zéro. Alors
$S(G^\sharp) = {G_0}^\sharp + {A_G}^\sharp$, avec ${G_0}^\sharp \perp {A_G}^\sharp$
et en passant aux clôtures de Zariski on a :
$S_k(G) := \overline{S(G^\sharp)} = G_0 + A_G$, et G_0 et A_G ont intersection finie. .

On généralise

Un "socle algébrique"

Soient $K_0 < K_1$ deux corps algébriquement clos , G semiabélienne sur K_1 , on définit le K_0-socle de G :

$$S_{K_0}(G) := G_0 + A_G$$

avec A_G la variété abélienne maximale de K_0-trace zéro, G_0 la variété semiabélienne maximale isogène à une S_0 sur K_0.

Corollaire du Théorème du Socle X sous-variété irréductible de G telle que $Stab_G(X)$ est fini, $\Gamma \subset G(K_1)$ de "rang" fini" tel que $X \cap \Gamma$ est Zariski dense dans X. Alors un translaté de X est contenu $S_{K_0}(G)$.

Réduction de ML au socle

Remarque: On a besoin d'une hypothèse style "$\Gamma \cap X$" dense dans X , sinon ce n'est pas vrai.

Dans la preuve, qui utilise le théorème du socle de théorie des modèles, Γ de "rang" fini permet de passer à des groupes de rang U fini dans les les corps séparablement clos. Preuve sans théorie des modèles?

Ensuite, on obtient

Corollaire Pour prouver ML pour les variétés semiabéliennes il suffit de le prouver pour les variétés semiabéliennes de la forme

$G = G_0 + A_G$.

avec G_0 "descend" à K_0, et A_G de K_0-trace zéro .....

Réduction à ML pour variétés abéliennes

Ensuite, ce qu'on cherchait:

Corollaire Mordell-lang pour les variétés semi-abéliennes se déduit de Mordell-Lang pour les variétés abeliennes de K_0-trace zéro.

Notre preuve, une fois ramenés à des G de forme $G_0 + A_G$ est simple et courte mais repasse quand même par la théorie des modèles , utilisant, pour décomposer X sur G_0 et sur A_G , le fait que ${G_0}^\sharp$ et ${A_G}^\sharp$ sont orthogonaux. Preuve algébrique directe?

$G^\sharp$ vs $S(G^\sharp)$

Donc utiliser le socle permet d'éviter les cas "méchants" de variétés semi-abéliennes ...
Dans BBP1,BBP2, nous avions montré les différences entre bonne propriétés de $A^\sharp$ et mauvaises propriétés de $G^\sharp$
Ces bonnes propriétés étaient utilisées pour la preuve sans trichotomie de ML pour variété abélienne sur $\mathbb{F}_p(t)^{sep}$ dans [BBP2].
Par exemple (en caractéristique p):
A somme de variétés abéliennes simples $\longrightarrow$ $A^\sharp$ est pluriminimal, donc $A^\sharp = S(A^\sharp)$ et $A^\sharp$ a rang de Morley relatif et $A^\sharp$ avec la structure induite par A élimine les quantificateurs.
Pas toujours vrai pour G variété semiabélienne non quasi scindée

variétés semiabéliennes

Problèmes: $k < K$ K séparablement clos, $k = K^{p^\infty}$ corps des constantes de K.
$G^\sharp$ n'a pas toujours rang de Morley relatif, n'a pas toujours elimination des quantificateurs, n'est pas toujours égal à son socle.
$0 \to T \to G \to E \to 0$
E courbe elliptique ordinaire sur k, $T = \mathbb{G}_m$ G une extension de E par T qui ne descend pas sur k
Alors la suite $0 \to T^\sharp \to G^\sharp \to E^\sharp \to 0$ n'est pas exacte
$G^\sharp$ n'a pas EQ , et $G^\sharp$ n'a pas rang de Morley relatif.
Mais $S(G^\sharp) = T^\sharp = T(k) = S(T^\sharp)$.
Et en fait :

	$A^\sharp$	$G^\sharp$	$S(G^\sharp)$
pluriminimal	oui	non	oui
EQ pour structure induite	oui	non	oui
rang de Morley relatif fini	oui	non	oui